

大阪学院大学

経 済 論 集

第36巻第1・2号

論 説

均衡、同次性とHeckscher – Ohlinの定理

.....山 田 雅 俊..... 1

日本市場における共変動プレミアムの検証

.....坂 本 淳.....25

研究ノート

対数正規確率変数の指数変換の分布の形状について

.....鍵 原 理 人.....43

2022年12月

大阪学院大学 経済学会

經 濟 論 集

第36卷第 1・2 号

2022年12月

大阪学院大学 経済学会

均衡、同次性と Heckscher – Ohlin の定理

山田 雅俊

1. 序

現代の経済学で均衡理論はその主要な位置を占め、需給・市場が常に均衡している・均衡が実現していることが想定されるが、そのような理解・想定の問題性を示そうとしたのがN.Kaldor, “Economics without Equilibrium” であると考えられる¹⁾。すなわち均衡理論の主要な議論の方法は、経済行動・活動、特に需要・供給行動に多数の想定を加えて形式化・公式化を行い、それら種々の条件が満たされる状況下で、経済活動の到達点である需要・供給の均衡が達成・実現されると考え、その均衡の特徴を探索・解明するというものと言える。これに対して、“Economics without Equilibrium” における Kaldor の主旨は、上記のような均衡理論の考え方が、経済の実態・實際を捉えていないあるいは実際に対応していず、したがってまた、経済（活動）に関わる種々の問題の真の解決に導かないと考えられることを指摘することにあると理解される。しかし、その警鐘は必ずしも多くの経済・経済学研究者に届いていない状況にあると考えられよう。

本稿は、Kaldor が、上記のような議論・主張を行う一つの論点として用いた、(自由) 貿易とその効果の問題を取り上げ、均衡理論の設定・想定の中では成立するが、現実においては、Heckscher – Ohlin の定理のように、貿易を行う双方の国がともに利益を得るのではなく、例えば戦後の日本のように大きく輸

出を伸ばし経済の発展・拡大を達成した国が存在する一方、米、英のように貿易の利益を得られない国が存在する²⁾ことについて、それがどのような状況において生じるか、またそのような結果がKaldorが言う均衡の想定、生産技術や選好の同質性等とどのように関係するかを、検討・確認しようとするものである。

以下これを次の順で議論する。次節では（自由）貿易のメリットを述べるHeckscher－Ohlinの定理についてそれがその前提・想定にどのように依存しているかを含め、確認・整理する。第3節では、自由貿易によって上記の日本対米・英のように不均等な経済利益や経済発展がどのようにして生じるか、特に、そのような現実の不均等性・較差が均衡理論の想定、特にKaldorが現実との差を指摘する生産技術や選好の同質性等とどのように関係するかを、検討する。第4節では、前2節の議論を比較し、均衡理論やそこで想定される種々の仮定・想定の意味を再考・整理する。

2. Heckscher－Ohlin定理の想定と含意

2.1) Heckscher－Ohlinの定理

Heckscher－Ohlinの定理は次のような内容・意味を持つものである；同じ生産技術、同じ選好を持つ2つの国が存在し、2つの国はその生産要素（生産要素は以下では資本と労働の2種類と想定する）賦存量（存在量）が異なっていると想定する。その時、2つの国の間で自由に（費用を掛けずに）貿易が行われるとすると、資本賦存量が相対的に豊富な国は資本集約財を輸出し、労働集約財を輸入する。逆に、労働賦存量が相対的に豊富な国は労働集約財を輸出し、資本集約財を輸入する。

Heckscher & Ohlinの元来の疑問は、Ricardoの比較生産費の理論が、国によって生産技術が異なる時各国は比較優位がある財の生産に特化すると言うの

に対し、生産技術が同じである時に貿易が行われるかというものである。この疑問に対し、Ricardo が 1 種類の生産要素しか考えなかったのに対し、2 種類の生産要素を考え、かつその存在量（賦存量）の比率が異なると、上記のような状況が生成・成立することを示したわけである。また、この貿易によって両国は各々の厚生を改善することが主張される。

2.2) Heckscher – Ohlin 定理の仮定・前提

以下収穫逓増または市場不均衡によって Heckscher – Ohlin 定理の状況がどのように変更されるかを見るため、まず同定理がどのように説明されるかを見ておこう。

1) Heckscher – Ohlin の定理は次のように説明される。すなわち；2 つの国 A 国と B 国が存在し、各々 2 つの生産要素労働 L と資本 K を用いて、 X 財と Y 財の 2 つの財を生産しているとする。

2 つの国における生産技術は同じであるとし、その生産技術は固定係数の生産関数で表されたとする。すなわち、 X 財および Y 財各々の生産量を x および y 、 X 財および Y 財各々 1 単位を生産するのに必要な労働と資本の量をそれぞれ a_L^X, a_K^X および a_L^Y, a_K^Y (a_L^X, a_K^X および a_L^Y, a_K^Y は正の定数) とする。すると、 X 財および Y 財の生産に投入される労働と資本の量をそれぞれ L_X, K_X および L_Y, K_Y とすると、 x および y は各々次のような関係にある、

$$x = \text{Min}[L_X/a_L^X, K_X/a_K^X] \quad (1)$$

$$y = \text{Min}[L_Y/a_L^Y, K_Y/a_K^Y] \quad (2)$$

生産技術がこのように固定係数の生産関数で表されると、投入要素が一定比率増加されれば、生産物も同比率だけ増加する、つまり、同生産技術は収穫一定で、生産関数は 1 次同次と呼ばれるものである。

この時さらに、 X 財を x だけ生産するのに必要な労働投入および資本投入を、上記と同じ表記になるが L_X および K_X とすると、次の関係が成立する、

$$x = L_X/a_L^X = K_X/a_K^X$$

同様に、 Y 財を y だけ生産するのに必要な労働投入および資本投入を上記と同様 L_Y および K_Y とすると、次の関係が成立する、

$$y = L_Y/a_L^Y = K_Y/a_K^Y$$

以上から次の関係が成立することが分かる、

$$L_X = a_L^X \cdot x, \quad K_X = a_K^X \cdot x, \quad L_Y = a_L^Y \cdot y, \quad K_Y = a_K^Y \cdot y \quad (3)$$

さらに、これらの生産投入係数の間に次の関係が成立していると仮定する、

$$\text{仮定 1} \quad a_K^X/a_L^X > a_K^Y/a_L^Y$$

仮定 1 は、 X 財を 1 単位生産するために必要な労働投入量に対する資本投入量の比率が、 Y 財を 1 単位生産するために必要な労働投入量に対する資本投入量の比率より大きいことを示すものである。つまりこの仮定は、 X 財の生産は Y 財の生産に比べ、労働に対しより多くの資本の投入が必要であることを示している。このような関係・状況がある時、 X 財は Y 財に比べて資本集約的であり、また逆に、 Y 財は X 財に比べて労働集約的と言われる。

2) 以上の想定の下で、両国間に取引・貿易がない、閉鎖経済の状態において均衡が成立すると考える時、どのような状況が生じるかを考えよう。

まず、 A 国および B 国に存在する労働および資本（賦存）量（endowment）を L^A, K^A および L^B, K^B で表す。また、各々の国における X 財と Y 財の生産量を x^A, y^A および x^B, y^B で、それらの生産に必要な労働と資本の投入量を $L_X^A, K_X^A, L_Y^A, K_Y^A, L_X^B, K_X^B$ および L_Y^B, K_Y^B で表す。

ここで、各国の労働および資本は与えられたもので所与の大きさと考え、両国の各生産要素の存在量（賦存量）に次の関係があると想定する、

$$\text{仮定 2} \quad K^A/L^A > K^B/L^B$$

この仮定は、 A 国は B 国に比べ労働 1 単位（1 人）あたりの資本の存在量が多いことを意味している。これは逆に見れば、 B 国が A 国に比べ資本 1 単位に対する労働量が多いことを意味する。このような意味で、仮定 2 は、 A 国

が B 国に比べて資本豊富国、同様に、 B 国が A 国に比べて労働豊富国であることを示している。

さて、このような状況の下で、各々自国のみを考えた場合の、各国国内における均衡を考える。この時まず、各国で各財の生産に利用できる労働および資本量はその賦存量を超えられないから、各変数間に次の関係が成立する。まず A 国について、その関係は次のように表される、

$$L_X^A + L_Y^A = a_L^X x^A + a_L^Y y^A \leq L^A \quad (4)$$

$$K_X^A + K_Y^A = a_K^X x^A + a_K^Y y^A \leq K^A \quad (5)$$

同様に B 国についても次が成立しなければならない、

$$L_X^B + L_Y^B = a_L^X x^B + a_L^Y y^B \leq L^B \quad (6)$$

$$K_X^B + K_Y^B = a_K^X x^B + a_K^Y y^B \leq K^B \quad (7)$$

また、全ての生産要素が使われる状況では(4)~(7)式は等号で成立することになる。

次に、生産者の行動に注目しよう。このため、 X 財、 Y 財の生産は競争的な状況にあり、生産技術が収穫一定であるという仮定から利潤が得られないことに注目する。つまり、 A 国における X 財および Y 財の価格を p_X^A および p_Y^A で、また労働賃金および資本レンタルをそれぞれ w^A および r^A で表し、さらに、 X 財を x^A だけ生産する場合に必要な労働および資本の投入量を L_X^A および K_X^A 、その際に得られる利潤を π_X^A 、 Y 財を y^A だけ生産する場合に必要な労働および資本の投入量を L_Y^A および K_Y^A 、その際に得られる利潤を π_Y^A で表すと、各財の生産で利潤が得られないことは次のように示される、

$$\pi_X^A = p_X^A \cdot x^A - (w^A L_X^A + r^A K_X^A) \leq 0 \quad (8)$$

$$\pi_Y^A = p_Y^A \cdot y^A - (w^A L_Y^A + r^A K_Y^A) \leq 0 \quad (9)$$

ただし、生産者・企業は利潤が負つまり損失が生じる場合生産を行おうとせず、生産が行われる場合には(8)および(9)式は等号で成立することになる。

ここで X 財および Y 財がともに生産されている状況を想定しよう。する

と、(8)および(9)式は次のように表される、

$$p_X^A = w^A L_X^A / x^A + r^A K_X^A / x^A \quad (10)$$

$$p_Y^A = w^A L_Y^A / y^A + r^A K_Y^A / y^A \quad (11)$$

これらの関係は(3)式を顧慮すると、次のようになる、

$$p_X^A = w^A a_L^X + r^A a_K^X \quad (12)$$

$$p_Y^A = w^A a_L^Y + r^A a_K^Y \quad (13)$$

次にA国の消費者を考えよう。A国の消費者は、労働者、資本所有者、生産者で構成されるが、その選好が互いに同じで1人の消費者として考えられるとする。この時、消費者の総所得は労働者の所得、および生産者・企業家の資本レンタルおよび利潤で構成される。総所得を I^A で表すと、それは上記から次のように示される、

$$I^A = w^A (L_X^A + L_Y^A) + r^A (K_X^A + K_Y^A) \quad (14)$$

これは、(8)および(9)式が等式で成立していることを考慮すると、次の関係が成立することを意味する、

$$I^A = p_X^A x^A + p_Y^A y^A \quad (15)$$

同一主体として見られると想定した全体としての消費者の選好が $U^A = U^A(D_X^A, D_Y^A)$ のような効用関数で表される（ただし D_X^A および D_Y^A はそれぞれA国の消費者全体としてのX財およびY財の需要・消費量を表す）とすると、その需要・消費（行動）は、予算制約

$$p_X^A D_X^A + p_Y^A D_Y^A \leq I^A \quad (16)$$

の下で効用を最大化することと表される。このようにして決まるA国のX財およびY財の需要を D_X^{A+} および D_Y^{A+} で表そう。

さて、両国が貿易を行っていない、つまり、各国で自給自足が行われている状況を想定しているから、各国においてその生産と需要が等しい、つまり各財の需給には次の関係が成立していなければならない、

$$x^A = D_X^{A+} \quad (17)$$

$$y^A = D_Y^{A+} \quad (18)$$

このように国内の生産量と需要量が一致、つまり 1 つの国でその生産・供給量と需要・消費量が均衡する状況を自給自足均衡（autarkic equilibrium）と言い、同均衡を実現させる価格が自給自足均衡価格と呼ばれる。

この自給自足均衡であるが、まず生産・供給量は、労働および資本の利用量に関する(4)および(5)式の関係から、各々の資源が全て利用される場合の各財の生産量との関係が次のように知られる。まず労働については、労働賦存量全量が使用される状況は、(4)式から次のように示される、

$$y^A = -(a_L^X/a_L^Y)x^A + L^A/a_L^Y \quad (20)$$

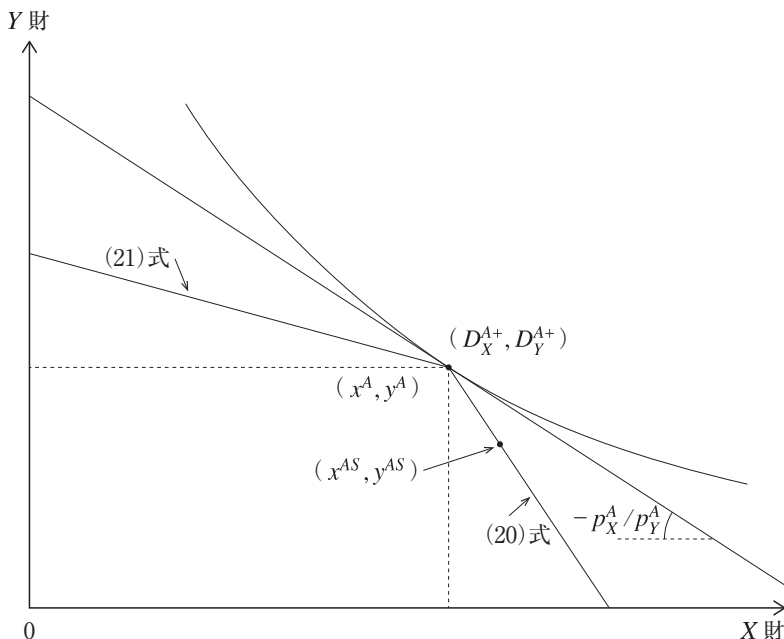
他方資本については、それが全量使用される状況が、同じように(5)式から次のように得られる、

$$y^A = -(a_K^X/a_K^Y)x^A + K^A/a_K^Y \quad (21)$$

(20)および(21)式は $x - y$ 平面上で直線で表され、さらに、仮定 1 ($a_K^X/a_L^X > a_K^Y/a_L^Y$) のように考えているので、(20)式が示す直線の傾きが(21)式に対応する直線の傾きより小さい・緩やかであることが分かる。(4)式が示す生産量の組 (x^A, y^A) は(20)式が示す直線の下側で示され、(5)式が示す生産量の組 (x^A, y^A) は(21)式が示す直線の下側で示される。したがって、A 国において生産可能な財の組 (x^A, y^A) は、(20)式および(21)式が示す 2 つの直線の下側で与えられることになる。

A 国における自給自足均衡は、図の上では次のように説明される（以下図 1 を参照³⁾）。まず、上記のようにして 2 財の生産可能な組（生産可能（曲）線・生産可能フロンティア）が決まる。労働および資本の両生産要素がすべて使用されるとすると、X 財および Y 財の生産量 (x^A, y^A) は生産技術の関係から決まり、生産可能線の右上端の点で与えられる。また、それらの生産が行われるとそれに対応して労働および資本の所得が決まる。さらに、それらの生産に対応して、(12)および(13)式のように X 財および Y 財の価格が決まるから、所得と

図1 A国の自給自足均衡



それら価格に対応してA国のX財およびY財の需要、 D_X^{A+} および D_Y^{A+} が決まる。この生産量 (x^A, y^A) と需要量 $(D_X^{A+}$ および $D_Y^{A+})$ が一般に一致する保証はないが、次のようにして両者が一致する状況がもたらされる。まず形式的には、(12)、(13)、(15)および(16)式から均衡をもたらし価格の組が決まる。同じことは図の上では、総所得が(15)式のように決まること、それが生産量の組 (x^A, y^A) 点を通る直線で示されることに注意すると、 (x^A, y^A) 点である無差別曲線がその所得・予算線に接するような価格の組が決まる、と言える。

同様のことはB国の自給自足均衡についても成立する。すなわち、B国についてもX財、Y財の双方が生産されるとすると、状況は以上とほぼ同じである。その状況は、上記の各関係式で肩付き文字AをBに変えたものでB国

における各変数の値を表すと、肩付き文字を A から B に変えた上記関係がほぼ同様に成立し、 X 財、 Y 財の生産は B 国の生産可能線の右上端点で与えられ、それに等しく B 国の X 財、 Y 財の需要 D_X^{B+} および D_Y^{B+} が決まり、それらを均衡としてもたらす両財の価格、賃金および資本レンタルが決まる。

3) さて次に、自給自足経済を離れ、 A 、 B 両国の間に貿易が開始されるとしよう。

この時、 A 国、 B 国ともに資源をすべて利用し X 財、 Y 財の両財が生産されるとすると、その生産の組は、 A 国については図 1 の (x^A, y^A) 点で示され、同国の両財の生産量および両財の生産比率は次のようであることが分かる、

$$x^A = \frac{a_{LY}K^A - a_{KY}L^A}{a_{LY}a_{KX} - a_{LX}a_{KY}} \quad (22)$$

$$y^A = \frac{a_{KX}L^A - a_{LX}K^A}{a_{LY}a_{KX} - a_{LX}a_{KY}} \quad (23)$$

$$\frac{y^A}{x^A} = \frac{a_{KX}L^A - a_{LX}K^A}{a_{LY}K^A - a_{KY}L^A} = \frac{a_{KX} - a_{LX}(K^A/L^A)}{a_{LY}(K^A/L^A) - a_{KY}} \quad (24)$$

同様の関係は B 国についても成立し、その両財の生産量および両財の生産比率は次のように表される、

$$x^B = \frac{a_{LY}K^B - a_{KY}L^B}{a_{LY}a_{KX} - a_{LX}a_{KY}} \quad (25)$$

$$y^B = \frac{a_{KX}L^B - a_{LX}K^B}{a_{LY}a_{KX} - a_{LX}a_{KY}} \quad (26)$$

$$\frac{y^B}{x^B} = \frac{a_{KX}L^B - a_{LX}K^B}{a_{LY}K^B - a_{KY}L^B} = \frac{a_{KX} - a_{LX}(K^B/L^B)}{a_{LY}(K^B/L^B) - a_{KY}} \quad (27)$$

仮定 2 のように A 国は 1 人当たり資本量が B 国より多く $K^A/L^A > K^B/L^B$ であるから、次の関係が成立する、

$$a_{KX} - a_{LX}(K^A/L^A) < a_{KX} - a_{LX}(K^B/L^B)$$

$$a_{LY}(K^A/L^A) - a_{KY} > a_{LY}(K^B/L^B) - a_{KY}$$

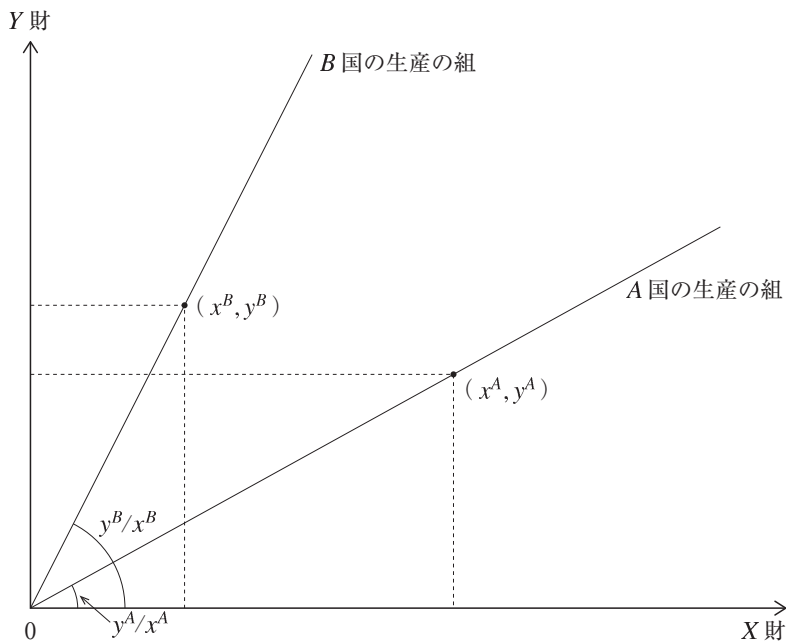
この関係を考慮して(24)式と(27)式を比較すると、さらに次の関係が得られる、

$$\frac{y^A}{x^A} < \frac{y^B}{x^B} \quad (28)$$

(28)式は、両国で資本および労働が完全雇用されている状況で両国の X 財および Y 財の生産量を比較すると、労働賦存量に比べて資本賦存量が豊富な A 国は労働集約的な X 財の生産に比べ資本集約的な Y 財の生産量が、 B 国に比べ相対的に大きくなることを示している。無論これは、両資源の完全雇用下で両財の生産量を比較すると、資本に比べて労働賦存量が豊富な B 国では X 財に比べ労働集約的な Y 財の生産量が相対的に大きいことでもある。この状況は次の図2のように示される。つまり、(28)式が示すように、 X 財、 Y 財を各々横軸、縦軸に取った図で、原点と (x^A, y^A) 点を結ぶ直線は原点と (x^B, y^B) 点を結ぶ直線より傾きが緩やかであることになる。

次に消費者を考え、その需要決定の状況を見よう。このために、 A 国およ

図2 各国の生産の組

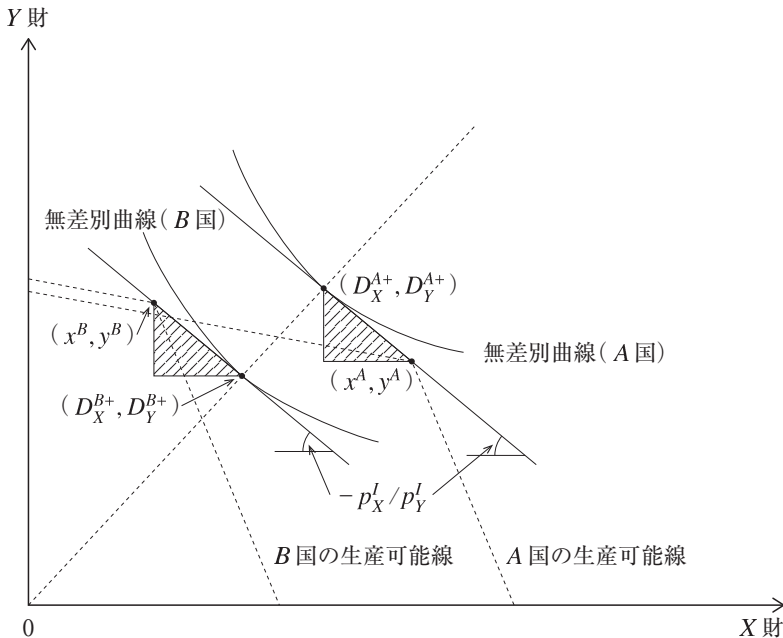


び B 国ともにその需要は各国の代表的な消費者の需要で表され、需要を決める選好は両国で同じで、さらに同選好はその無差別曲線が相似拡大的 (homothetic) であるとする。

さて、両国で X 財と Y 財について貿易が行われる状況を想定すると、まず、 X 財、 Y 財の価格は両国で同じでなければならない。この共通の価格を p_X^I および p_Y^I で表す。各国では、各財の生産によって得られる所得の範囲で両財の最適な需要・消費量が決められることになる。それらの量を前小節と同様 (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) および (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) で示すと、所得と需要量・需要額の関係は次のように表される、

$$p_X^I D_X^{A+} + p_Y^I D_Y^{A+} = p_X^I x^A + p_Y^I y^A \quad (29)$$

図 3 貿易と均衡



$$p_X^I D_X^{B+} + p_Y^I D_Y^{B+} = p_X^I x^B + p_Y^I y^B \quad (30)$$

つまり、各国は(29)式または(30)式で表される予算制約の範囲で、それぞれの効用を最大にする需要量 (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) または (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) を決定するわけである。この (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) および (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) が決まる状況は、図3のように示される⁴⁾。その特徴の第一は、各国の消費の組 (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) および (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) は、選好が相似拡大的な無差別曲線で表されるという仮定から、原点を通る直線上にあるという点である。また、予算線(29)式または(30)式が示すように、A国の国民所得がB国のそれより高ければ、同直線上で (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) が (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) の右上にあることを意味することになる。さらに、各国の両財の消費の組が同一直線上にあることは、両財の消費の比率が同じ、つまり次の関係が成立していることを意味している、

$$\frac{D_Y^{A+}}{D_X^{A+}} = \frac{D_Y^{B+}}{D_X^{B+}} \quad (31)$$

さらに、X財とY財について世界全体での生産量と需要量は一致しなければならないから、次の関係が成立しなければならない、

$$x^A + x^B = D_X^{A+} + D_X^{B+} \quad (32)$$

$$y^A + y^B = D_Y^{A+} + D_Y^{B+} \quad (33)$$

また、2国、2財しか存在しないと想定しているから当然であるが、(32)式は $x^A - D_X^{A+} = D_X^{B+} - x^B$ となり、 $x^A > D_X^{A+}$ つまりA国がX財を輸出していれば $D_X^{B+} > x^B$ つまりB国が同財を輸入していることを示している。逆に、A国がX財を輸入していればB国は同財を輸出することになる。さらに、A国の予算式(29)は

$$p_X^I (x^A - D_X^{A+}) = p_Y^I (D_Y^{A+} - y^A)$$

と書き直すことができ、この関係式は、A国がX財を輸出している場合、同国はY財を輸入していることを示している。もちろん上記の関係は、A国がX財を輸入している場合、同国はY財を輸出することを示すものでもある。

以上は B 国についても同様に成立することになる。

次に、(28)式から次が成立する、

$$\frac{y^A}{x^A} < \frac{y^A + y^B}{x^A + x^B} < \frac{y^B}{x^B}$$

また、(31)式から次が成立する、

$$\frac{D_Y^{A+}}{D_X^{A+}} = \frac{D_Y^{A+} + D_Y^{B+}}{D_X^{A+} + D_X^{B+}} = \frac{D_Y^{B+}}{D_X^{B+}}$$

ここで(32)および(33)式を考慮すると、次の関係が得られる、

$$\frac{y^A}{x^A} < \frac{D_Y^{A+}}{D_X^{A+}}, \quad \frac{y^B}{x^B} > \frac{D_Y^{B+}}{D_X^{B+}} \quad (34)$$

さらに、 A 国の予算式(29)で(34)式を考慮すると、次の関係が得られる、

$$D_X^{A+} < x^A, \quad D_Y^{A+} > y^A \quad (35)$$

同様に B 国についても次の関係が得られる、

$$D_X^{B+} > x^B, \quad D_Y^{B+} < y^B \quad (36)$$

(35)および(36)式は、資本賦存量が相対的に多い A 国が資本集約的な X 財を輸出して労働集約的な Y 財を輸入、他方、労働賦存量が相対的に多い B 国は資本集約的な X 財を輸入して労働集約的な Y 財を輸出していることを示している。図 3 は以上の状況を要約的に示すものでもある。

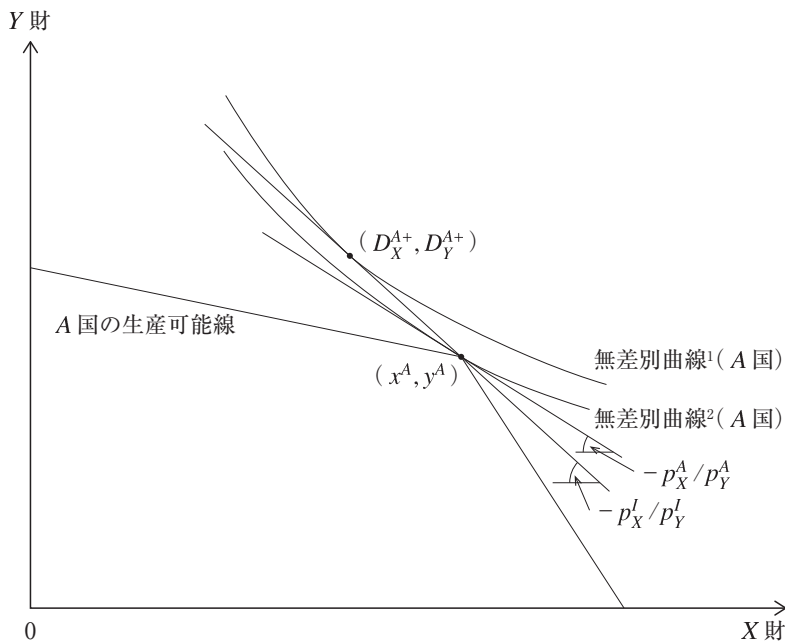
以上の議論を纏めると、国際貿易のパターンに関する重要な定理、つまり本節初めにふれた次の Heckscher – Ohlin の定理が得られる、

Heckscher – Ohlin の定理 2 つの国の間で貿易が自由（費用を掛けず）に行われるとする。この時、資本賦存量が相対的に豊富な国は資本集約財を輸出し、労働集約財を輸入する。他方、労働賦存量が相対的に豊富な国は労働集約財を輸出し、資本集約財を輸入する。

4) 最後に、上記のような貿易に関して、その均衡価格、さらに効用・厚生の変化について考えておこう。まず国際的な均衡価格であるが、これは、自給自足均衡の状況において、 A 国および B 国の相対的な要素賦存量の大小、生

産技術および選好が両国で同じであるという想定から、各国の X 財および Y 財両財の生産、および両財の需要は（仮定 1 および (28) 式を考慮すると）前述の図 3 のような関係になっていることが分かる。そこで次に両国間で貿易が行われる状況を考えると、前項で見たように両国は同じ価格で、輸出・輸入が相互に対になり、かつ同量だけの取引が行われることに注意する。この状況もまた図 3 に示されたようである。つまり、(34)～(36) 式あるいは Heckscher-Ohlin の定理に見られる関係を考慮すると、同図の状況が生じることが確認されよう。それらの事実と、さらに無差別曲線が原点に対して凸であると仮定されることを考慮すると、同図に描かれているように、 A 国では両財の国際的均衡価格比率は自給自足均衡における価格比率より大きく、逆に B 国では前者

図 4 貿易と厚生



が自給自足均衡における価格比率より小さくなることを意味している。つまり次が成立している、

$$\frac{p_X^B}{p_Y^B} > \frac{p_X^I}{p_Y^I} > \frac{p_X^A}{p_Y^A} \quad (37)$$

さらに、(37)式あるいは(34)～(36)式を考慮すると、 (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) は (x^A, y^A) より右上方にある無差別曲線と予算線の接点、同様に (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) は (x^B, y^B) より右上方にある無差別曲線と予算線の接点であり、したがって、貿易の結果両国とともに各国民の効用水準が高まることが分かる（図4はこれをA国について少し詳しく示している）。但し効用・満足の改善に関するこの点は、両国ともに貿易を行うか否かを自由に決定できるから、効用の改善が図られない限り貿易を行う必要はなく、貿易が行われるのは両国でその効用・厚生が改善が可能だからとも言え、貿易が各国の厚生を改善をもたらすものであることが確認される。

3. 収穫逓増、市場不均衡と不均等成長

前節の議論は時間の経過を考慮しないあるいは1期のみの議論であるから、それが繰り返される時何が起こるかが次に問題になる。この問題に関して、均衡理論あるいは静学（的均衡）理論の考えは、単純に前節で見たのと同じ状態が繰り返されるというものである。そこで本節では、Kaldorが言うように、収穫逓増、あるいは市場不均衡が存在する時、不均等な成長・発展が起こりうることを示し、また、その不均等成長がどのような形で生じうるかを考えよう。

3.1) 収穫逓増と不均等成長

1) このためにまずA国の生産技術が収穫逓増的で、その様子が次のように表されるとしよう、

$$x_{t+1} = \exp[c(x_t + y_t)] \text{Min}[\frac{L_X}{a_{LX}}, \frac{K_X}{a_{KX}}] \quad (38)$$

$$y_{t+1} = \exp[c(x_t + y_t)] \text{Min}[\frac{L_X}{a_{LY}}, \frac{K_X}{a_{KY}}] \quad (39)$$

ただし c はある正の定数、 x 、 y の右下付きの t 、 $t+1$ は、時間が一定の長さの期間に区切られ、両変数の t 期あるいは $t+1$ 期の値を示すものとする。この時(38)および(39)式は、同国の生産水準に応じて同じ投入の下で X 財および Y 財の生産性・生産量が指数的に同率増加することを想定するものである。

このように想定すると、 A 国における生産はその生産水準とともに生産性が上昇し、前節で考えた均衡が繰り返される時、時間の経過に伴いその生産性および生産量がさらに上昇・増大していくことになる。そこで、生産性・生産量の増大が繰り返された一定期間後のある時点进行想定すると、 A 国の生産性・生産量は B 国に比べ大きく上昇・増加しているとする。これは図2を用いると次のように説明されよう。つまり、 B 国の生産性は変化せず生産の組もほぼ同じ点 (x^B, y^B) に留まるのに対し、 A 国の生産量は(38)および(39)式にしたがってその速度を速めながら (X 財、 Y 財生産が同率で) 増加し、 A 国の生産の組は生産量の推移を示す線上を右上方に移動することになる。

2) さらに、このような生産力の差が拡大した後の時点における、 A 国、 B 国間の貿易を考えよう。この場合、(38)および(39)式のように X 財、 Y 財の生産性が同率で上昇するとすると、 A 国、 B 国両国を合わせた X 財、 Y 財の生産量は、 A 国が相対的に資本が豊富で、また、 X 財の生産が資本集約的であるという仮定により、 Y 財に比べ X 財の生産量が相対的により大きく増加すること、他方、 A 国、 B 国両国消費者の選好が前節で見たように対称的な相似拡大的無差別曲線で表されることを顧慮すると、貿易取引の状況は次のようなものになる。すなわち、両国で X 財、 Y 財の (国際) 価格は当然同じでなければならないが、相対的に多量に生産される X 財の (相対) 価格が低下し、図における予算線の傾きは図3におけるよりも緩やかなものになると考えられる。

また、各国においてその輸入額は輸出額に等しく、さらに、 A 国の X 財の輸出量は B 国の輸入量に等しく、 A 国の Y 財の輸入量は B 国の同財輸入量に等しいから、 A 国の生産の組 (x^A, y^A) 、需要の組 (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) が大きく右上方に移動した形で、貿易と貿易前後の状況が図 3 と類似の形で示されよう（ただし一般に (D_X^{A+}, D_Y^{A+}) 、 (D_X^{B+}, D_Y^{B+}) は同一線上にないと考えられる。以下の図 6 も参照）。また、貿易前後の状況あるいは貿易取引がそのように考えられることはまた、貿易が各々の国の効用水準を高め利益をもたらすものであることも理解されよう。

上記の一定期間後の状況が含意するのは次の諸点であろう。1 つは、Kaldor が言うように生産増加がさらに所得・生産の増加につながるという生産量・生産性の（累積的）上昇・増大をもたらすすると、 A 国と B 国の間にはその生産性および生産水準、それに対応する所得水準、満足・効用水準に大きな差が生じることである。第 2 に、較差拡大後に両国で貿易が行われる状況を見ると、同貿易では輸出・輸入が同額であり、また、貿易は両国に満足・効用の改善・増大をもたらすことである。第 3 に、両国間の貿易はその較差に関わらず、較差はその後も拡大していくと考えられることである。

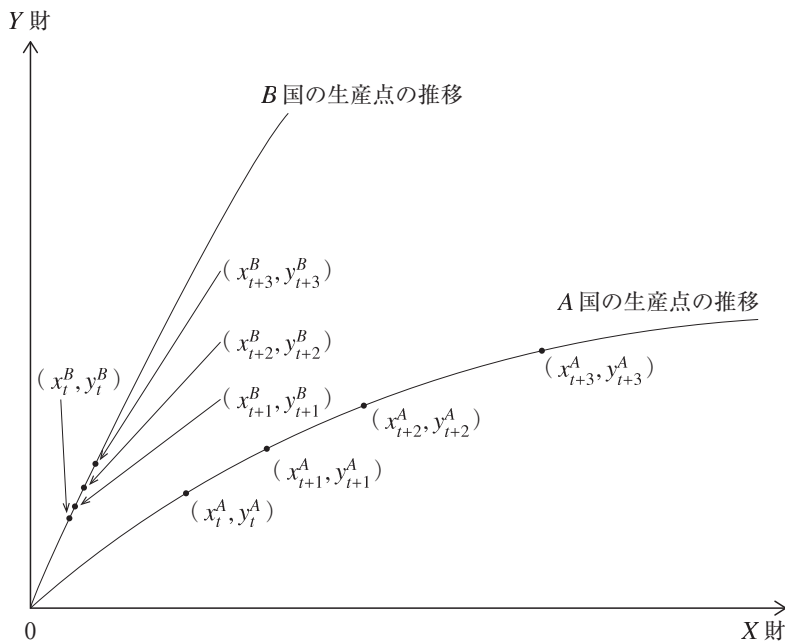
3.2) 市場不均衡と不均等成長

次の問題は、均衡理論の想定・主張と異なり、種々の経済取引が需給均衡が図られた後に行われるのではなく、需給均衡に至らないまま取引され、経済活動・経済（社会）の展開がなされるとする、つまり、経済（社会）に一般的に不均衡が存在すると考えると、前小節で見た国・経済（社会）間の較差の拡大・不均等な成長・発展の問題がどのように捉えられるかである。本小節ではこの問題を考えよう。

1) さて、市場あるいは取引の均衡化が行われず、需給の不均衡を残したまま経済・経済活動が推移していく状況を考えようとする、需給不均衡が存在

する国・財の組について多様な状況が考えられる。そこで本項ではA国内で需給不均衡が存在し、実際のX財、Y財の生産の組 (x^{AS}, y^{AS}) に対し、需要はその生産に対応して定まる財価格を前提すると前節と同じ組に定まるとし、 $x^{AS} > D_X^{A+}, y^{AS} < D_Y^{A+}$ のような関係にあるとしよう（図1を参照）。さらに、前小節の生産性増大・成長の想定と異なり、累積的な成長・増大を生じる状況を考えるため、X財が資本財でしたがつて各国におけるその生産が各々の国の資本量を増加させ、それによって生産の増大がもたらされる状況を想定しよう。つまり、前小節と同様時間が一定の長さの期間に区切られるとし、ある期間の生産あるいは需要量であることを各変数の右下付き文字で示し、資本（量、存在・賦存量）とX財の生産量の間に次のような関係があるとする、

図5 資本蓄積と生産点の推移



$$K_{t+1}^j = K_t^j + x_t^{jS}, \quad j = A, B \quad (40)$$

2) さて、以上のように財の1つが資本財であり、さらに、同資本の生産を重視することにより大きな資源の蓄積を図る国は資本量を増大させ、その結果将来の生産可能性を拡大すると考える。

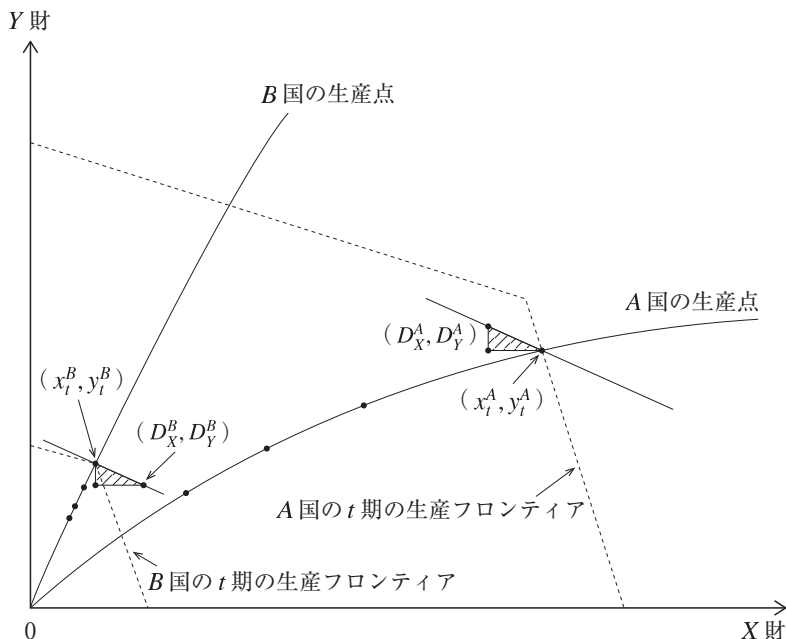
まず、資本財生産が資本集約的な生産技術に依存していることを顧慮すると、資本財の蓄積によって生産（可能性）の増大・拡大が図られる状況は、前述の生産の拡大可能性を示す図2と同じようにして図5のように示されよう。すなわちここでの考え方は、前小節のように生産の増大が外部性、技術進歩等により直接的に生産性の増大をもたらすのではなく、各国における生産・経済活動の選択が各国の将来における生産可能性、各国の経済厚生に影響することを考慮するものである。

この状況は例えば次のように説明されよう。すなわち、A国において生産要素となるX財の生産が重視され、前節で見た生産可能線の右上端点以上に同財の生産が行われるとしよう（図1の (x^{AS}, y^{AS}) ）。その結果、同国では資本豊富国であること以上にX財の生産増加が図られ、同選択は時間的経過を経てB国に比べA国の資本（存在・賦存）量をさらに増加させることになる。その結果、A国における資本（存在・賦存）量が労働と比較しても増加し、一定期間後のX財、Y財の生産量の組は例えば図5の「A国の生産点」の曲線のように拡大すると推測される。他方、B国については（資本増加が捨象できる程度と想定し）図2とほぼ同じ状況に留まると考えると、図5の「B国の生産点」曲線のように示されよう。

この時、両国に貿易がない場合には、同図に示されたような生産と較差拡大のプロセスがその後も継続すると考えられよう。

他方、両国で貿易が行われる場合には、両国の生産における比較優位および資本・労働の賦存量を顧慮すると、以上と同様、A国がX財を輸出・Y財を輸入、他方B国がY財を輸出・X財を輸入することが考えられよう。また、前

図6 較差と貿易



述の両財の価格の決定式(12)、(13)式等を顧慮し、その際 X 財は A 国で相対的に低価格であることを考え、貿易においては A 国と B 国の価格の中間的な水準で取引されると想定しよう。すると、図3と同様に考え、この場合の貿易の前後の状況は、 A 国の生産の組 (x^A, y^A) が大きく増加し、かつ X 財の生産が大きく拡大した中で、図6のように示されよう。図6のように、 A 国が X 財を輸出、 B 国が同財を輸入する貿易が行われるとすると、それは両国間の資本蓄積較差を幾らか解消し、少しは資本蓄積・生産性の較差の解消をもたらすことが考えられる。

最後に、以上のように需給不均衡を生じるとしても資本蓄積を重視する考え方は、戦後のわが国で「傾斜生産方式」と呼ばれた、重工業とその製品生産の

拡大を重視した状況等に対応させるものであろう。

3) 本小節の、資本蓄積を重視、その増大を図る考え方はさらに、前小節の、生産の増大が生産性の上昇・増大をもたらすという議論と合わせ、同時に考慮しうるものであろう。Kaldorによる「生産の増大が生産性の上昇・増大をもたらす」という理解・論点は、現実・実際の経済におけるそのような経験に基づき、また、生産方法・技術革新等についての知見によるものと考えられるが、特に大規模生産が生産性上昇等の利益・成果をより増大・拡大させるのであれば、それは明らかに、資本蓄積重視の考えと相俟って国・経済間の較差を拡大・増幅させる要因になることが推測・理解されると言える。

4. 収穫逓増、市場不均衡と較差

前節で見たように、収穫逓増および市場不均衡はともに、異なる国・経済間の較差を拡大させる要因になりうる事が分かる。ただ、異なる国・経済間の貿易は、各々の選択・行動に基づくものであるから、必然的に各々の国・経済の厚生・効用の増大をもたらすものでなければならないと考えられよう。他方、不均等化・較差拡大の点では、それらはその縮小・改善をもたらすと考えられないことも注目される。以下、上記議論の含意と要点を整理しよう。

1) 収穫逓増性は、3.1節で見たように、生産の増大が生産性の増大をもたらすのであれば、それは生産性・生産量の較差とその拡大を生じさせる可能性が高いと考えられる。

2) Kaldorは、(自由)貿易が較差拡大をもたらしうることを主張する際、市場不均衡をその直接の要因とはしておらず⁵⁾、また実際にも、市場不均衡が直接的に国・経済間の較差をもたらすとは言えないであろう。しかし、3.2節で見たように、経済(社会)の不均衡に拘わらず資本蓄積を進め生産性・生産能力の上昇・増大を図ることは、経済成長・発展を図る少なくとも1つの方法

であったことが考えられる。特に、Kaldorは不均等成長の例として日本の成長と米・英の停滞を挙げているが、わが国における「傾斜生産方式」はそのような対応を示唆するものとも見られよう。

3) 第3節末で触れたように、収穫逓増性と市場不均衡は互いに独立なものであるから、両者は同時に考慮され存在しうるものである。すなわち、収穫逓増性と市場不均衡は相俟って、国・経済間の較差を拡大する要因として作用しうることを意味するものであろう。

4) 最後にKaldorは、収穫逓増性が国・経済間の較差をもたらしただけでなく、貿易が一方の国・経済の成長を妨害し阻害要因となるとも述べている⁶⁾。このような状況の1つは、前節で見た収穫逓増性が一方の国・経済で働かない状況、あるいは生産資源の蓄積が行われない状況として理解することが考えられよう。しかし、ある国・経済の停滞、(相対的) 貧困化の原因として、例えば、「モノカルチャー」のような状況が景気停滞・較差拡大の要因として指摘されることを顧慮すると、ある国・経済内で利害の異なる主体が存在し、貿易が一部の主体に大きな利益をもたらすが、同国・経済の他の主体には停滞あるいは貧困化をもたらすことも考えられよう。そのような状況は代表的消費者のみを想定する第3節の議論では捉え得ないが、自由貿易と較差・貧困化の問題が、収穫逓増性、不均衡下の資本蓄積等の可能性とともに、1つの国・経済におけるグループ間の利害対立等、(自由) 貿易の含意に関しても経済構造等さらに考慮する要因があることを示唆・合意するものと考えられる。

注

- 1) 同様の考え方・理解はかなり広く存在するものと考えられる、P.Crugman (1998), D.Rodrik (2015) 他を参照。
- 2) Kaldor (1985), pp.71-72参照。
- 3) 以下の図は多くを多和田・近藤編 (1999) に依拠している。

- 4) 図 3 の 2 つの三角形は貿易三角形と呼ばれ、(32)、(33)式等を顧慮すれば互いに合同であることが分かる。
- 5) Kaldor (1985), pp.71-72。
- 6) Kaldor (1985), p.71。

参考文献

- Brakman, Steven, and Karry Garretsen (2017), Economics without Equilibrium by N.Kaldor (Book Review), *Regional Studies* 51, pp.655-658.
- Crugman, Paul (1998), Two cheers for formalism, *Economic Journal* 108, pp.1829-1836.
- Kaldor, Nicholas (1985), *Economics without Equilibrium*, M.E.Sharpe, New York.
- Rodrik, D (2015), *Economic Rules*, Norton, New York.
- 多和田真・近藤健児編 (2002)、『国際経済学（改訂版）』、創世社、東京。

Equilibrium, Homogeneity and Heckscher-Ohlin Theorem

Masatoshi Yamada

ABSTRACT

Economics in the present usually relies on the concept of equilibrium/equilibria. Equilibrium/equilibria of course mean(s) that demand for and supply of any good or service are equal. However, the use of and reliance on the equilibrium concept may affect the way of understanding of economic activities and thus any economy as a whole, and could blur the understanding and finding of appropriate answers to the variety of economic problems, that would be the point of N.Kaldor (1985). The present paper examines, in a more detail, the question of whether free trade makes better the both of traders/trading countries. It will show that free trade could enhance the welfare of only one of the traders especially under the assumption of increasing returns or disequilibrium/disequilibria in some of markets. Increasing returns and disequilibria in markets, as assumed away from traditional equilibrium theory, thus might invite disparity between and impoverishment in one side of traders/countries, differing from traditional theory.

日本市場における共変動プレミアムの検証*

坂 本 淳

概 要

本稿では、Ungeheuer and Weber (2021) で示された、過去のマーケットリターンと個別リターンの共変動の回数に基づく、株式プレミアムについて、日本のデータを用いた実証分析を行う。分析の結果、日本市場では米国市場で示された、共変動の回数に伴う、一貫した正のプレミアムは観察されなかった。しかしながら、時期によって傾斜の向きは異なるものの、共変動の回数に応じたプレミアムの単調性は観察され、共変動の回数が投資家行動に何らかの影響を与えていることは示唆された。

キーワード：ファイナンス、実証分析、株式プレミアム、共変動

JEL分類番号：G11, G12, G41.

* 執筆に当たっては、福田祐一氏、山根明子氏、工藤健太氏より大変貴重なコメントを頂いた。また、本研究はJSPS 科研費20H01515と19K23212の助成を受けたものである。勿論、本稿に残されるすべての誤りは、全て著者の責任に帰すものである。

1 はじめに

代表的な資産価格モデルであるCAPMでは、マーケットリターンに対する相関を表すベータで、個別資産のリスクエクスポージャーが決定し、証券市場線に従って、プレミアムが決定することになる。よって、投資家はマーケットリターンと個別資産の超過収益率の相関に対し、自己の投資に関する意思決定を行っている事となる。このようなCAPMの論理が成立するためには、過去のリターンの系列について、投資家が正確に相関を認識できなければならない。しかしながら、神経科学の分野において、人間は過去起きた極端な結果を正確に認識し、受け入れることは難しいという事が指摘されている(d'Acremont and Bossaerts 2016)。マーケットリターンや、個別資産の収益率は、正規分布よりも裾野が厚いことは以前から知られており、期待値から大きく外れた収益率は、しばしば発生する。このような実現値は、相関係数の計算において重要な情報であるが、仮に正しく認識することが難しいのであれば、投資家はそもそも正確なベータを把握することが出来ないという事になる。

このような状況における、投資家のリスク判断について、Ungeheuer and Weber (2021) (以下UW論文と称する)が新しい枠組みを提案している。UW論文では、ランダムに生成された2つの資産の過去のリターンの系列を見せて、被験者がどのような投資判断を行うかという実験を行っている。この2つの資産は2次以上の高次モーメントが同一となり、期待リターンは資産Aが資産Bを上回るよう設定されている。つまり、資産Bへの投資を動機付けるのは、分散投資によるリスク低下のみである。この設定の下、最初の実験では、ベンチマークとして、2資産それぞれの平均値から大きく外れた(極端な)リターンが生じるときと、平均値付近の(中間的な)リターンが生じるときで、同じ符号の相関を持つように設定し、投資に関する意思決定を被験者に尋ねている。その結果、古典的な資産価格理論同様に、相関係数の減少に応じて、資

産Bへの投資が進むことが確認されている。次の実験では、トリートメント1の被験者群に極端なりターンの相関を負、中間的なりターンの相関を正として設定し（全体の相関は0または負）、トリートメント2の被験者群に極端なりターンの相関を正、中間的なりターンの相関を負として設定し（全体の相関は0または正）、投資に関する意思決定を尋ねている。古典的な資産価格理論に基づくと、全体の相関に依存して投資の意思決定が行われるため、トリートメント1の被験者の方が、資産Bへの分散投資が進む（相関係数が0の場合はトリートメント2と変わらない）事が予測される。しかしながら、この実験ではトリートメント2の被験者の方が、資産Bへの投資が大きくなるという結果を報告している。この実験が与える示唆は、投資家が極端なりターンの実現を、正確に認識することができず、結果として中間的なりターンにおける運動に支配されて、2資産間の共変動関係を認識しているというものである。被験者が見たりターンの系列では、中間的なりターンが実現する回数が、極端なりターンが実現する回数よりもはるかに多い。したがって、相関関係を正確に把握できない投資家は、実現りターンの符号が一致する程度で、リスクを認識していると解釈することが可能である。すなわち、同一符号を取る回数が少ない資産ほど、共変動の程度が小さく（CAPMにおけるベータが小さい）、リスクの小さい資産であると認識していることになる。UW論文では、このような認知の歪みを Counting Heuristic であると述べている。

UW論文では、実験だけでなくNYSEのデータを用いて、様々なファクターモデルや、平均収益率の比較から、過去のマーケットリターンに対する、符号の一致回数が多いポートフォリオが少ないポートフォリオのプレミアムを有意に上回ることを明らかにしている。一方で、Li and Wang (2022) はUW論文の結果に対して、日本を含む、様々な国のデータを用いて分析を行った結果、個別株のボラティリティをコントロールすることで、共変動の回数を起因とするプレミアムが消滅することを示している。

日本においても、投資家行動を分析した研究は非常に多いが、近年の研究には、顔他（2019）、岡田（2021）、鈴木他（2018）等がある。顔他（2019）は、日本のデータを用いてアンケート調査から金融リテラシーや専門家のアドバイスが、投資家行動に与える影響に焦点を当てた分析をしている。岡田（2021）では、アンケート調査で得られたデータから、プロスペクト理論における確率ウェイト関数や、意思決定ウェイト関数のパラメータを推定し、先行研究と比較している。その結果、日本人が比較的強い心理バイアスを持つことや、実際のマーケットリターンの確率分布と比較して、主観的（心理的）な確率分布が大きくゆがむことを明らかにしている。さらに、鈴木他（2018）では、個人投資家の資産保有行動や、金融商品に関する理解度、過去に金融トラブルに巻き込まれた経験の有無が、個人属性や様々な行動バイアスにどのように影響を受けるか、という点を分析している。

日本においても、このような投資家行動に関する様々な研究があるが、現在のところ、個別資産とマーケットリターンの符号の一致回数に基づくプレミアムを検証した論文は、Li and Wang（2022）のみであり、本稿は異なるサンプルを用いた分析の一つとして、研究の蓄積に貢献している。

そのほかの本稿の貢献として、第一に、新しい符号一致の回数の指標を提案している事が挙げられる。UW論文は過去のリターンの符号の一致回数のみを対象としている。しかしながら、マーケットリターンとの相関係数が高い株式は、符号の一致回数も多くなる。すなわち、符号の一致回数は相関に関わる情報も含むことになる。もちろん、UW論文では、マーケットベータをコントロールしたうえで分析を行っているが、相関に基づいた意思決定が出来ないという実験結果を、直接的に検証するには、相関係数の影響を完全に除去した指標も合わせて検証するべきであろう。この観点から、本稿では符号の一致回数に関する、相関調整済みの指標を作成し、分析を行っている。第二に、先行研究では、ポートフォリオリバランスを毎月行っているが、本稿では3か月、6

か月、9 か月、12か月の4つのタイミングを用いている。異なるリバランスのタイミングを用いても、結果が復元できるのか、あるいはどの程度のタイミングで結果が強く、あるいは弱くなるのかを検証することは、投資家が符号の一致回数に基づく意思決定を、どの程度のスパンで行っているのかという事を知るうえで重要である。

本稿における分析の結果、UW論文に基づくオリジナルの指標でも、本稿が提案する相関調整済みの指標でも、符号の一致回数が多いポートフォリオに対する、一貫した正のプレミアムは観察されなかった。また、サブサンプルに分けた分析では、時期によってプレミアムの符号が反転している事が明らかになった。しかし、これらの結果は有意ではない。また、時期によって、傾斜の向きは異なるが、いずれの指標を用いた場合でも、符号が一致する回数で5分位に分けられたポートフォリオのプレミアムに、単調性が見られた。この単調性は、どのようなファクターモデル、リバランスのタイミングでも概ね保存されており、この指標が何らかの情報を有する可能性は示唆された。

本稿は以下のように構成される。2節では、仮説を明示する。3節では、使用するデータを説明する。4節で推定方法を、5節では推定結果をそれぞれ述べる。最後に6節でまとめを行う。

2 仮 説

UW論文では、ある月の共変動回数について、直前の52週分の週次リターンを用いて、同一符号を観測した回数を用いていた。これを本稿ではオリジナルの共変動変数 $Comove^{UW}$ とする。東京証券取引所において、米国市場と同様のプレミアムが観察されるならば、以下の仮説が支持される。

仮説1：高 $Comove^{UW}$ ポートフォリオは、低 $Comove^{UW}$ ポートフォリオの

リスクプレミアムを上回る

一方で、相関係数が高ければ、マーケットリターンの符号と一致する確率は高くなる。従って、 $Comove^{UW}$ は相関に関する情報も含むことになる。相関係数が高ければ、CAPMのベータが高くなるので、リスクプレミアムが高くなるのは、古典的な資産価格理論から考えて自然なことである。勿論、ポートフォリオの組成に当たって、各ポートフォリオのベータの値に大きな差異が出ないようコントロールするが、影響が完全に除去できているとは限らない。ベータの影響が残存すると、投資家が相関係数ではなく、マーケットリターンとの符号の一致回数にリスクを見出すという、UW論文の実験結果を正確に検出することはできない。そこで、本稿では $Comove^{UW}$ の計測に用いた週次リターンデータを用い、以下の株式間のクロスセクション回帰式の残差項を、相関調整済み共変動変数 $Comove^{adj}$ として用いる。

$$\begin{aligned} Comove_i^{UW} &= \delta_0 + \delta_1 \rho_{i,m} + \mu_i \\ Comove^{adj} &\equiv \mu_i \end{aligned}$$

ここで $\rho_{i,m}$ は、週次データから推定される、マーケットリターンと株式 i のリターンとの相関係数である。この $Comove^{adj}$ を用いて、以下の仮説についても検証を行う。

仮説2：高 $Comove^{adj}$ ポートフォリオは、低 $Comove^{adj}$ ポートフォリオのリスクプレミアムを上回る

3 データ

標本期間は、1984年11月から、2021年6月であり、プレミアムの検証には月

次リターンを用いる。また、個別株の $Comove^{UW}$ と $Comove^{adj}$ の計算には、各月の直前52週分の週次リターンを用いる。4節で詳述するが、本稿では、共変動プレミアムの検出のため、ポートフォリオを組成して分析を行う。このポートフォリオのリスクプレミアムに対して、CAPMで示されたマーケットリターンの超過収益率（ $R_{M,t} - R_{F,t}$ ）、Fama and French (1993) で示されたサイズファクター（ SMB_t ）とバリューファクター（ HML_t ）、Carhart (1997) で示されたモメンタムファクター^{*1}（ MOM_t ）、Fama and French (2015) で示された収益性ファクター（ RMW_t ）と投資ファクター（ CMA_t ）をコントロール変数として加える。また、安全資産収益率には、10年物の国債利回りを用いる。各ファクターの記述統計量と相関係数は、表1と2にそれぞれ記載されている。これらのデータは、すべて金融データソリューションズ社提供の、NPM関連データサービスより取得する。

表1 ファクターの記述統計量

	N	Mean	Std,dev	Max	Min
$R_m - R_f$	441	0.003	0.053	0.179	-0.208
SMB	441	0.002	0.035	0.159	-0.146
HML	441	0.006	0.030	0.111	-0.116
MOM	441	-0.004	0.043	0.112	-0.283
RMW	441	-0.001	0.027	0.091	-0.131
CMA	441	0.001	0.026	0.107	-0.098

*1 モメンタムファクターは、過去3か月のリターンデータから計算される値を用いる。

表2 ファクターの相関係数行列

	$R_m - R_f$	SMB	HML	MOM	RMW	CMA
$R_m - R_f$	1.000	-0.045	-0.062	-0.225	-0.246	0.134
SMB	-0.045	1.000	0.273	-0.212	-0.318	0.195
HML	-0.062	0.273	1.000	-0.041	-0.330	0.291
MOM	-0.225	-0.212	-0.041	1.000	0.163	-0.112
RMW	-0.246	-0.318	-0.330	0.163	1.000	-0.749
CMA	0.134	0.195	0.291	-0.112	-0.749	1.000

4 推定方法

本稿では、個別株の固有ショックの影響を除去するため、マーケットベータと、共変動変数でソートされたポートフォリオを組成し、プレミアムを検証する。ポートフォリオの組成に当たって、最初にリバランス月までの直前の52週分の週次リターンデータから、個別株ごとのマーケットベータ、 $Comove^{UW}$ 、 $Comove^{adj}$ を計算する。次に計算されたマーケットベータに基づいて、各個別株を5分位にソートする。さらに、ソートされた分位内で、 $Comove^{UW}$ または、 $Comove^{adj}$ に基づいて、更に5分位にソートする。これによって、合計25のセルに分けることができる。最後に、共変動変数での同一分位を一つにまとめて、合計5つのポートフォリオを組成し、等加重平均によってポートフォリオリターンを計算する*2。先んじて、マーケットベータによるソートを行うことによって、低い（高い）共変動変数分位内に、高い（低い）マーケットベータを持つ銘柄が含まれることにより、5つに分けられたポートフォリオのマー

*2 ポートフォリオの収益率は、小型株の過剰な影響を避けるため、本来時価加重平均値によって計算されることが望ましい。しかし、UW論文はプレミアムの検証に当たって、等加重平均値を採用しているため、本稿でもこれにならうこととする。

ケットベータを均一化する事ができる。ポートフォリオは、3 か月、6 か月、9 か月、12 か月ごとにリバランスを行う。

各ポートフォリオ収益率を、以下のマルチファクターモデルで時系列推定する。

$$R_t - R_{F,t} = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i F_{i,t} + u_t$$

添え字 t は時点を表し、 $R_t - R_{F,t}$ はポートフォリオの超過収益率を、 $F_{i,t}$ はファクター i の値を、 u_t は誤差項を、それぞれ表す。推定するマルチファクターモデルは、CAPM、ファーマ・フレンチの3ファクターモデル（FF3）、カーハートの4ファクターモデル（FF3+MOM）、ファーマ・フレンチの5ファクターモデル（FF5）である。これらのファクターモデルに加えて、各ポートフォリオ超過収益率の時系列平均値（Raw）も検証対象とする。なお、UW論文やLi and Wang（2022）では、マーケットマイクロストラクチャーによる影響を除去するため、極端な小型株を除いて分析を行っていたが、本稿ではそのようなデータ加工は行わない。

日本の株式市場を用いても、UW論文と整合的な結果が得られるならば、各種のマルチファクターモデルでは説明出来ないプレミアムが残存するはずであり、ポートフォリオの α は、高い共変動変数分位のポートフォリオほど高くなるはずである。従って、共変動変数分位の高いポートフォリオをロングし、低いポートフォリオをショートすれば、有意な正の α が推定されることとなり、仮説を検証することができる。

UW論文では、サンプルの後半（1989年から2015年）において、特に $Comove^{UW}$ に基づくプレミアムが高まるという結果が報告されている。本稿でも、同様の検証を行うため、フルサンプルでの推定に合わせて、1984年11月から2002年8月と、2002年9月から2021年6月の2つのサブサンプルによる推定も行う。

5 結 果

5.1 $Comove^{UW}$ に基づいて組成されたポートフォリオの推定結果

表3には、 $Comove^{UW}$ に基づいて、ポートフォリオを組成した推定結果が百分率で記載されている。Raw列は、各ポートフォリオ超過収益率の時系列平均値、CAPM、FF3、FF3+MOM、FF5はそれぞれのファクターモデルにおける α の値を示している。また、Low (High) 行が、 $Comove^{UW}$ が低い (高い) 株式で構成されたポートフォリオであり、diff行は、HighからLowの収益率を引いた、ロングショートポートフォリオの推定結果を表している。

前半のサブサンプルの結果は表左側に記載されている。3か月ごとにリバランスした場合、全てのモデルにおいてdiff行が正の値を示している。この結果は仮説と整合的ではあるが、有意な推定値は無い。ただし、FF3、FF3+MOM、FF5の推定結果は、単調に α が増大しており、何らかの情報を持つ可能性はある。リバランスのタイミングを6か月、9か月、12か月に変更しても、この結果は概ね保存されている。ただし、RawとCAPMについては、Lowの推定値がHighの推定値を上回っており、仮説とは逆の結果となっているが、これらの結果も有意ではない。

次に後半のサブサンプルの結果は、表中央に記載されている。3か月ごとのリバランスによる結果は、前半のサブサンプルと真逆であり、全てのモデルにおいてdiff行が負の値を示している。この結果は仮説を支持しないが、前半サブサンプルと同様に有意ではない。また、Raw、CAPMの結果も含めて、全てのモデルにおいて単調に減少していることが分かる。この結果は、リバランスのタイミングを変えても保存される。

最後に、フルサンプルの結果が表右側に記載されている。3か月リバランスのFF5を除く、全てのモデル、リバランスのタイミングにおいて、diff行の結果は負であり、サンプル後半の影響が強いことをうかがわせる結果となった。

表3 $Comove_{UW}$ を基準とするポートフォリオの推定結果

	1984/11-2002/8(8%)					2002/9-2021/6(%)					1984/11-2021/6(%)				
	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5
	3か月ごとのリバランス										6か月ごとのリバランス				
Low	-0.140	-0.058	-0.390***	-0.409***	-0.390***	0.969***	0.405**	0.089	0.094	0.084	0.414	0.183	-0.096	-0.101	-0.102
2	-0.118	-0.027	-0.313***	-0.372***	-0.308***	0.955***	0.365**	0.079	0.083*	0.077	0.418	0.166	-0.100**	-0.117**	-0.096**
3	-0.073	0.024	-0.224***	-0.322**	-0.217***	0.916***	0.313**	0.048	0.052	0.045	0.422	0.159	-0.083**	-0.122**	-0.081*
4	-0.113	-0.013	-0.236**	-0.379***	-0.228**	0.887***	0.276*	0.034	0.034	0.034	0.387	0.117	-0.125**	-0.163**	-0.105**
High	-0.133	-0.025	-0.149	-0.271*	-0.131	0.821**	0.193*	-0.011	-0.010	-0.005	0.344	0.058	-0.121*	-0.154**	-0.090
diff	0.007	0.033	0.241	0.138	0.259	-0.148	-0.212	-0.100	-0.104	-0.089	-0.071	-0.124	-0.025	-0.053	0.012
	9か月ごとのリバランス										12か月ごとのリバランス				
	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5
	3か月ごとのリバランス										6か月ごとのリバランス				
Low	-0.096	-0.014	-0.344***	-0.341***	-0.341***	0.979***	0.418**	0.101	0.107	0.097	0.442	0.209	-0.069	-0.071	-0.072
2	-0.115	-0.023	-0.303***	-0.379***	-0.298***	0.976***	0.388**	0.101**	0.104**	0.097**	0.431	0.178	-0.085*	-0.105**	-0.082*
3	-0.073	0.023	-0.235**	-0.320***	-0.227**	0.899***	0.300**	0.037	0.041	0.038	0.413	0.152	-0.105**	-0.131**	-0.091**
4	-0.097	0.002	-0.211**	-0.351***	-0.204**	0.860**	0.246**	0.007	0.009	0.008	0.382	0.112	-0.125**	-0.162**	-0.105**
High	-0.136	-0.029	-0.156	-0.292**	-0.139	0.799**	0.171	-0.037	-0.035	-0.033	0.331	0.046	-0.136**	-0.173**	-0.109*
diff	-0.040	-0.014	0.187	0.048	0.203	-0.180	-0.247*	-0.138	-0.142	-0.130	-0.110	-0.163	-0.067	-0.102	-0.037
	12か月ごとのリバランス										12か月ごとのリバランス				
	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5
	3か月ごとのリバランス										6か月ごとのリバランス				
Low	-0.105	-0.023	-0.344***	-0.364***	-0.341***	0.976***	0.406**	0.086	0.092	0.083	0.435	0.201	-0.073	-0.080	-0.076
2	-0.068	0.025	-0.255**	-0.325**	-0.249***	0.953***	0.357**	0.073	0.076*	0.069	0.442	0.187	-0.075	-0.094*	-0.070
3	-0.037	0.059	-0.203**	-0.307***	-0.198***	0.918***	0.316**	0.047	0.051	0.049	0.440	0.179	-0.085**	-0.114*	-0.071*
4	-0.143	-0.043	-0.263**	-0.381***	-0.253***	0.838**	0.233*	-0.001	0.000	-0.002	0.347	0.078	-0.161***	-0.193**	-0.139**
High	-0.142	-0.036	-0.164	-0.281*	-0.148	0.810**	0.187*	-0.018	-0.017	-0.016	0.334	0.052	-0.134*	-0.166**	-0.107*
diff	-0.037	-0.013	0.181	0.083	0.192	-0.166	-0.219	-0.104	-0.109	-0.098	-0.101	-0.148	-0.061	-0.086	-0.031
	12か月ごとのリバランス										12か月ごとのリバランス				
	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5
	3か月ごとのリバランス										6か月ごとのリバランス				
Low	-0.080	0.001	-0.294***	-0.303***	-0.290***	0.987***	0.421**	0.103	0.108	0.097	0.454	0.222	-0.048	-0.052	-0.049
2	-0.146	-0.053	-0.351***	-0.413***	-0.349***	0.957***	0.365**	0.082*	0.085*	0.079*	0.405	0.150	-0.120***	-0.137***	-0.116***
3	-0.039	0.058	-0.188**	-0.272**	-0.182**	0.832**	0.239*	-0.028	-0.025	-0.028	0.397	0.136	-0.117**	-0.142***	-0.104**
4	-0.056	0.045	-0.199*	-0.340***	-0.187**	0.874***	0.270**	0.036	0.039	0.039	0.409	0.139	-0.106*	-0.133**	-0.085*
High	-0.163	-0.057	-0.185	-0.321**	-0.171	0.827**	0.198*	-0.012	-0.010	-0.009	0.332	0.050	-0.133**	-0.169**	-0.106*
diff	-0.083	-0.058	0.109	-0.018	0.118	-0.160	-0.223*	-0.115	-0.119	-0.106	-0.121	-0.172	-0.085	-0.117	-0.057

注: $Comove_{UW}$ で5分位にソートされた、ポートフォリオに関する推定結果を記載している。Raw列には超過収益率の時系列平均値、CAPM、FF3、FF3+MOM、FF5列には各ファクターモデルにおける α の値を示している。 $Comove_{UW}$ の値が低い株式で構成された第1分位のポートフォリオがLowであり、高い株式で構成された第5分位のポートフォリオがHigh行である。中間の2、3、4はそれぞれの分位を表す。diff行はHighのポートフォリオをロングし、Lowのポートフォリオをショートした、ロングショートポートフォリオの時系列推定値が示されている。統計的検定には、平均超過収益率、または各ファクターモデルの α がゼロという帰無仮説の下で、1ヵ月ラックのNewey-West頑健標準誤差を用いている。***、**、*は、1%、5%、10%水準でそれぞれ有意であることを表す。

また、RawとCAPMの結果については、どのようなリバランスのタイミングにおいても、推定値が単調に減少していることが分かる。これらのモデルについては、前半のサブサンプルで単調性は観察されていないことから、推定値が単調に減少するという、後半のサブサンプルの結果に影響を受けているものと思われる。一方、他のモデルについては、3か月のリバランスにおいては、推定値の単調性は観察されない。しかし、6か月のリバランスでは、推定値は単調に減少している。9か月、12か月のリバランスにおいては、それぞれ、第4分位、第2分位のポートフォリオ超過収益率が他のポートフォリオと比較して、大きな負の値を取るものの、これらの分位を除いては、概ね単調に減少する。

以上の結果から、日本の株式市場をデータとして用いた場合、 $Comove^{UW}$ による、一貫した正のプレミアムは検出されない。また、ロングショートポートフォリオの α の符号も時期によって異なり、有意性も低い。ただし、時期によって各ポートフォリオの α の値が、 $Comove^{UW}$ のソートに対して、単調性を有しており、何らかの情報を持つ可能性は示唆される。

5.2 $Comove^{adj}$ に基づいて組成されたポートフォリオの推定結果

前小節の推定結果は、 $Comove^{UW}$ の持つ、相関係数の影響をコントロールしていない。マーケットベータがコントロールされるように、分位ポートフォリオを用いた推定を行っているが、ベータの影響が完全に除去されていない可能性も考えられる^{*3}。そこで、超過収益率の相関をコントロールした $Comove^{adj}$ によるソートを行い、検証を行う。

*3 マーケットベータと $Comove^{UW}$ が強い相関を持つ場合、同一マーケットベータの分位の中で、比較的高い（低い） $Comove^{UW}$ の分位内に、相対的に高い（低い）マーケットベータの値を持つ株式が入ることになる。このような状況では、今回のマーケットベータによるコントロールでは、影響を完全に除去出来ているとは言い難い。

検証結果については、表4に記載されている。記載方法については、表3と同様である。前半のサブサンプルの結果については、表の左側に記載されている。 $Comove^{UW}$ によるソートの結果とは異なり、Raw、CAPMも含めた全ての推定結果において、diff行が正の値となっている。ただし、有意な結果は3か月及び6か月ごとのリバランスを行った、FF5のみであり、その有意水準も10%に過ぎない。一方で、FF3、FF3 + MOM、FF5の結果では、高い（低い） $Comove^{adj}$ のポートフォリオほど、 α が大きく（小さく）なるという、単調性が観察される。この結果は、表3の推定結果と同様である。

次に、後半のサブサンプルの推定結果が、表中央に記載されている。この期間は、どのモデル、リバランスのタイミングにおいても、diff行は負の値となっており、仮説を支持しない結果となっている。但し、この結果も12か月ごとのリバランスを行うCAPMを除いて、有意なものは無い。また、3か月ごとのリバランスでは第3分位、9か月ごとのリバランスでは第2分位で、高い超過収益率を観察しているが、その他の結果は概ね $Comove^{adj}$ によって、 α が低下するという単調な結果がみられる。従って、概ね表3と同様の結果であると結論付けられる。

最後に、フルサンプルの推定結果が、表右側に記載されている。一部の結果を除いて、diff行のほとんどが負の値を取っているが、他の結果と同様に有意な値ではない。また、明確な単調性は、どのモデル、リバランスのタイミングにおいても観察されない。

以上の結果から、 $Comove^{adj}$ でソートされた結果も、 $Comove^{UW}$ と同様の結果を示しており、共変動の回数に伴う、一貫した正のプレミアムは観察されなかった。また、時期によって傾斜の向きは異なるが、概ね単調性を持つ点も同様であり、何らかの情報を持つ可能性は示唆される。

表4 $Comove^{adj}$ を基準とするポートフォリオの推定結果

1984/11-2002/8 (%)					2002/9-2021/6 (%)					1984/11-2021/6 (%)				
Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5	Raw	CAPM	FF3	FF3+MOM	FF5
3か月ごとのリバランス														
Low	-0.210	-0.128	-0.428***	-0.459***	-0.426***	0.960***	0.398***	0.093	0.098	0.091	0.375	0.142	-0.120*	-0.122*
2	-0.073	0.018	-0.278***	-0.355***	-0.274***	0.961***	0.361**	0.083	0.087*	0.080*	0.444	0.190	-0.077	-0.099*
3	-0.127	-0.090	-0.288***	-0.373***	-0.261***	0.993***	0.395***	0.134***	0.136***	0.131***	0.433	0.170	-0.075	-0.102*
4	-0.041	0.060	-0.181*	-0.315**	-0.169*	0.839**	0.232*	-0.008	-0.005	-0.009	0.399	0.129	-0.116*	-0.153**
High	-0.109	-0.003	-0.147	-0.262*	-0.130	0.828**	0.215**	0.007	0.008	0.013	0.359	0.080	-0.107	-0.137**
diff	0.101	0.124	0.282	0.197	0.296*	-0.132	-0.184	-0.086	-0.090	-0.078	-0.015	-0.062	0.013	-0.009
6か月ごとのリバランス														
Low	-0.162	-0.079	-0.383***	-0.402***	-0.379***	0.978***	0.411**	0.109	0.114	0.108	0.408	0.174	-0.092	-0.099
2	-0.100	-0.008	-0.296***	-0.376***	-0.289***	0.972***	0.386**	0.100*	0.104*	0.095*	0.436	0.183	-0.080	-0.102*
3	-0.123	-0.027	-0.265***	-0.353***	-0.259***	0.926***	0.330**	0.073*	0.075*	0.071*	0.402	0.141	-0.100*	-0.124**
4	-0.054	0.047	-0.203**	-0.335***	-0.197**	0.890***	0.278**	0.034	0.035	0.034	0.418	0.147	-0.102*	-0.136**
High	-0.091	0.015	-0.118	-0.248*	-0.100	0.789**	0.174	-0.030	-0.029	-0.027	0.349	0.070	-0.117*	-0.153**
diff	0.071	0.095	0.265	0.155	0.279*	-0.189	-0.237*	-0.139	-0.143	-0.135	-0.059	-0.104	-0.025	-0.055
9か月ごとのリバランス														
Low	-0.172	-0.088	-0.384***	-0.423***	-0.380***	0.944***	0.374*	0.054	0.060	0.051	0.386	0.149	-0.111	-0.122*
2	-0.088	0.005	-0.287***	-0.370***	-0.280***	1.004***	0.406**	0.135**	0.138**	0.133**	0.458	0.202	-0.064	-0.086
3	-0.050	0.045	-0.194**	-0.290***	-0.187**	0.922***	0.325**	0.070	0.072*	0.071*	0.436	0.177	-0.070	-0.097*
4	-0.105	-0.004	-0.242**	-0.358***	-0.234***	0.830**	0.230*	-0.012	-0.010	-0.013	0.363	0.094	-0.148**	-0.180***
High	-0.103	0.002	-0.151	-0.265*	-0.135	0.812**	0.196*	-0.006	-0.005	-0.004	0.354	0.076	-0.121*	-0.153**
diff	0.069	0.090	0.233	0.158	0.244	-0.133	-0.179	-0.060	-0.065	-0.056	-0.032	-0.073	-0.010	-0.031
12か月ごとのリバランス														
Low	-0.195	-0.112	-0.393***	-0.427***	-0.386***	1.001***	0.435**	0.124	0.130*	0.122	0.403	0.170	-0.089	-0.099
2	-0.131	-0.039	-0.320***	-0.389***	-0.317***	0.978***	0.388**	0.088*	0.111**	0.106**	0.424	0.169	-0.092*	-0.110**
3	-0.049	0.048	-0.206***	-0.287***	-0.199***	0.840**	0.249*	-0.011	-0.008	-0.012	0.396	0.134	-0.117**	-0.140***
4	0.011	0.112	-0.153	-0.289**	-0.143	0.871***	0.270**	0.032	0.034	0.032	0.441	0.172	-0.078	-0.114*
High	-0.131	-0.026	-0.161	-0.288**	-0.147	0.819**	0.198**	-0.008	-0.006	-0.006	0.344	0.065	-0.124**	-0.159**
diff	0.063	0.086	0.232	0.139	0.239	-0.182	-0.237*	-0.132	-0.136	-0.128	-0.059	-0.105	-0.035	-0.060

注: $Comove^{adj}$ で5分位にソートされた、ポートフォリオに関する推定結果を記載している。Raw列には超過収益率の時系列平均値、CAPM、FF3、FF3+MOM、FF5列には各ファクターモデルにおける α の値を示している。 $Comove^{adj}$ の値が低い株式で構成された第1分位のポートフォリオがLow行であり、高い株式で構成された第5分位のポートフォリオがHigh行である。中間の2、3、4はそれぞれの分位を表す。 $diff$ 行はHighのポートフォリオをロングし、Lowのポートフォリオをショートした、ロングショートポートフォリオの時系列推定値が示されている。統計的検定には、平均超過収益率、または各ファクターモデルの α がゼロという無偏仮説の下で、1カ月のNewey-West頑健標準誤差を用いている。***、**、*は、1%、5%、10%水準でそれぞれ有意であることを表す。

6 ま と め

本稿では、UW論文で存在が示唆された、過去の収益率において、マーケットリターンと同じ符号を示した回数に応じて、プレミアムが発生するという仮説の検証を行った。また、検証に当たって、UW論文で提案された共変動指標だけでなく、相関係数を調整した本稿独自の共変動指標についても分析を行った。

推定の結果、いずれの指標を用いた場合でも、日本の株式市場においては、共変動の回数に応じた統計的に有意なプレミアムの存在は、確認されなかった。しかしながら、時期によって傾斜の向きは異なるものの、各ファクターモデルの α や、平均超過収益率は一定の単調性を有することが明らかになった。したがって、共変動の回数は、株式のプレミアムに対し、何らかの情報を持つ可能性はある。この事に対する、適切な解釈を加えることは本稿に残された課題の一つであろう。

最後に、その他の点で本稿に残された課題を述べる。本稿では、時価総額の極めて小さい、超小型株を除去せずに分析を進めた。しかしこれらの超小型株が、推定に深刻なバイアスを与える可能性について、Hou et al. (2020) で指摘されている。この点については、今後の改善点であろう。また、本稿ではファクターモデルの α を時系列推定しているだけであり、ファーマ・マクベス回帰など、クロスセクションの検証に用いられる方法を利用していない。この点についても、今後の課題としたい。

参考文献

- Carhart, Mark M (1997) "On persistence in mutual fund performance," *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 1, pp. 57-82.
- d'Acremont, Mathieu and Peter Bossaerts (2016) "Neural mechanisms behind identification of

- leptokurtic noise and adaptive behavioral response,” *Cerebral Cortex*, Vol. 26, No. 4, pp. 1818-1830.
- Fama, Eugene F and Kenneth R French (1993) “Common risk factors in the returns on stocks and bonds,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1, pp. 3-56.
- (2015) “A five-factor asset pricing model,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 116, No. 1, pp. 1-22.
- Hou, Kewei, Chen Xue, and Lu Zhang (2020) “Replicating anomalies,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 33, No. 5, pp. 2019-2133.
- Li, Peixin and Baolian Wang (2022) “The Ungeheuer and Weber (2021) Comove and Stock Returns Effect Disappears with Control for Idiosyncratic Volatility,” *Critical Finance Review* (forthcoming).
- Ungeheuer, Michael and Martin Weber (2021) “The perception of dependence, investment decisions, and stock prices,” *The Journal of Finance*, Vol. 76, No. 2, pp. 797-844.
- 岡田克彦 (2021) 「なぜ日本人は株式資産を持たないのか?」, 『証券アナリストジャーナル= Securities analysts journal』, 第59巻, 第11号, 56-63頁.
- 顔菊馨・近藤隆則・白須洋子・三隅隆司 (2019) 「日本の個人投資家のリスク資産投資：金融リテラシーの種類や情報源の違いはどのような影響を与えるのか?」, 『経営財務研究』, 第39巻, 第86号, 86-103頁.
- 鈴木明宏・高橋広雅・竹本亨 (2018) 「金融教育と行動バイアスが金融行動と金融トラブルへの巻き込まれやすさに与える影響：金融リテラシー調査データを利用した分析」, 『山形大学紀要 (社会科学)』, 第49巻, 第1号, 1-13頁.

Empirical Analysis of Comovement Premiums in the Japanese Market

Jun Sakamoto

ABSTRACT

This paper presents an empirical analysis of the equity premium based on the frequency of comovement between past market returns and individual returns, as indicated in Ungeheuer and Weber (2021), using Japanese data. As a result, we do not observe a consistent positive premium with the frequency of comovement in the Japanese market, as was shown for the U.S. market. However, the monotonicity of the premium with the frequency of comovement was observed, although the direction of the slope differed depending on the period. Thus, the results suggest that the frequency of comovement has some effect on investor behavior.

Keywords : Finance; Empirical analysis; Stock premium; Comovement

JEL Classification Numbers : G11, G12, G41.

対数正規確率変数の指数変換の分布の形状について

鍵 原 理 人*

概 要

本稿において、対数正規分布に従う確率変数（対数正規確率変数）の指数変換の分布について考察する。具体的には、その密度関数を構成した上で、密度と母数の関係について分析する。その結果として、対数正規確率変数の指数変換の密度関数は、その母数の値に応じて、単調的に減少する（単調減少型）か、もしくは、単調的にはないが減少する（非単調減少型）かのいずれかである事が明らかにされる。これにより、対数正規確率変数の指数変換の分布はその母数の値に応じて単調減少型か非単調減少型という二種類の形状を示す事が分かる。

キーワード：対数正規分布、指数変換、密度関数

JEL分類番号：C46, C20.

* 大阪学院大学経済学部, e-mail: masato.kagihara@ogu.ac.jp

1 序 論

無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される指数分布は、連続型の確率分布として最も基本的な分布の一つである。その指数分布に従う確率変数に対して負の指数変換を施せば、新たに単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数が導かれ、かつ、その分布は一様分布に帰着する。単位区間 $(0, 1)$ 上に定義される一様分布は、指数分布と同様にして、連続型の確率分布として最も基本的な分布である。

上述の事実に基づいて、本稿は、無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される確率分布として、指数分布と同様に基本的な分布である対数正規分布を対象として、上述したところと同じ変換を施す。即ち、対数正規分布に従う確率変数（対数正規確率変数）に対して、負の指数変換を施すことによって単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数を導く。そして、その密度関数を導出した上で、その形状と母数の関係について分析し、その結果として得られる知見を命題として整理する（命題1参照）。なお、このようにして本稿で生成される分布族については、確率分布族についての文献である蓑谷（2010）や Johnson, Kotz and Balakrishnan（1994）、Stuart and Ord（1994）、Balakrishnan and Nevzorov（2003）、Leemis and McQueston（2008）、Forbes, Evans, Hastings and Peacock（2011）、Song and Chen（2011）、Leemis, Lockett, Powell and Vermeer（2012）、Krishnamoorthy（2016）、Crooks（2019）、また、特に正規分布や対数正規分布についての文献である柴田（1981）や蓑谷（2012）、Aitchison and Brown（1957）、Crow and Shimizu eds.（1988）、Patel and Read（1996）、Limpert, Stahel and Abbt（2001）、Simon（2002）、Limpert and Stahel（2017）には言及を見出せない。

本稿は、以下において、次のように構成される。先ず、第2節において、対数正規確率変数の負の指数変換の分布としてその密度関数を導出する。次に、第3節において、対数正規確率変数の負の指数変換の分布について、その母数と密度の形状の関係を体系的に検討し、その結果として得られる知見を命題1

として提示する．また，参考として，対数正規分布についての同様の議論を付録Aに提示する．以上の検討の過程で得られる密度関数のグラフについては全て付録Bに提示する．なお，本稿において提示される図は全てMapleを用いて作図されたものである．最後に，第4節で結論を述べる．

2 対数正規確率変数の指数変換とその分布

正の実数値を取る確率変数 Y に対して，その対数変換 $X := \log Y$ が正規分布に従う時， Y の確率分布を対数正規分布と呼ぶ．ここで，等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する．この時，例えば，平均が μ で分散が σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対して， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるならば， $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ などと表記する．

さて， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ として， X の分布関数と密度関数をそれぞれ Ψ と ψ と表記すると， $x \in (-\infty, \infty)$ に対して次の表現を得る：

$$\Psi(x|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x \psi(t|\mu, \sigma^2) dt, \quad \psi(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

先ず， $X = \log Y$ ， $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して， Y の密度関数を導出する．定義により， Y は対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数である事に注意する．ここで， Y の分布関数を G と表記すると，分布関数の定義により，

$$\Psi(x|\mu, \sigma^2) := P(X \leq x) = P(\log Y \leq x) = P(Y \leq e^x) = G(e^x|\mu, \sigma^2)$$

を得る．但し， $P(X \leq x)$ は確率変数 X の実現値が実数 x 以下になるという事象の確率を表す．ここで， $y := e^x \iff x = \log y$ と表記すると，次式を得る：

$$G(y|\mu, \sigma^2) = \Psi(\log y|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\log y} \psi(t|\mu, \sigma^2) dt.$$

よって、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 Y の密度関数を g と表記すれば、

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{d}{dy}G(y|\mu, \sigma^2) = \psi(\log y|\mu, \sigma^2) \times \frac{1}{y}$$

であるので、次式が導かれる：

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0. \quad (1)$$

次に、 $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ に対して、その負の指数変換 $Z := e^{-Y}$ の密度関数を導出する。但し、対数正規確率変数 Y が無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る一方で、 Z は単位区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数である事に注意する。 Z の分布関数を F と表記すると、 F は、その定義により、単位区間 $(0, 1)$ 内の任意の実数 z に対して次式として得られる：

$$F(z|\mu, \sigma^2) := P(Z \leq z) = P(Y \geq -\log z) = 1 - G(-\log z|\mu, \sigma^2).$$

但し、 G は対数正規確率変数 Y の分布関数である。よって、 Y の密度関数が g である事に注意すれば、

$$G(-\log z|\mu, \sigma^2) = \int_0^{-\log z} g(y|\mu, \sigma^2) dy$$

により、 Z の密度関数 f はその分布関数 F の導関数として得られる：

$$f(z|\mu, \sigma^2) = \frac{d}{dz}F(z|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{z}g(-\log z|\mu, \sigma^2).$$

従って、任意の $z \in (0, 1)$ に対して、 Z の密度関数 f は次式として与えられる ($-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$)：

$$f(z|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \log \frac{1}{z}} \exp \left[-\frac{(\log \log \frac{1}{z} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2)$$

3 対数正規確率変数の指数変換の分布の形状

(2)式で定義される密度関数 f は, (1)式で定義される対数正規分布の密度関数 g と確率変数 $Y \sim g$ に対して, その負の指数変換 $Z := e^{-Y}$ の密度関数として導出された. ここで, Y と Z の密度関数の定義域はそれぞれ無限区間 $(0, \infty)$ と単位区間 $(0, 1)$ であることに注意する. なお, 以下においては, 次のような略記法を適宜に採用する ($y \in (0, \infty)$, $z \in (0, 1)$):

$$g(y) := g(y|\mu, \sigma^2), \quad f(z) := f(z|\mu, \sigma^2).$$

但し, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$ である.

さて, 任意の $z \in (0, 1)$ に対して,

$$f(z) = \frac{1}{z} g(-\log z)$$

であることに注意すると, その両辺を z で微分することにより, 次の関係式が得られる:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \{g(-\log z) + g'(-\log z)\}.$$

ここで, 任意の $y \in (0, \infty)$ に対して次式の表現が得られることに注意する (付録A (5)式参照):

$$g'(y) = -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sqrt{2\pi\sigma^3}y^2} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{y} \left(1 + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2}\right) g(y).$$

よって,

$$g(y) + g'(y) = -\frac{1}{y} \left(1 - y + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2}\right) g(y)$$

により, 次の表現が導かれる:

$$f'(z) = -\frac{g(-\log z)}{z^2 \log z} \left(1 + \log z + \frac{\log \log \frac{1}{z} - \mu}{\sigma^2}\right).$$

ここで、任意の $z \in (0, 1)$ に対して、 $z^2 > 0$ と $\log z < 0$, $g(-\log z) > 0$ であることに注意すると、次の同値関係を得る ($z \in (0, 1)$) :

$$f'(z) \leq 0 \iff 1 + \log z + \frac{\log \log \frac{1}{z} - \mu}{\sigma^2} \leq 0.$$

この同値関係について、対数による z の単調減少変換を $y := -\log z \in (0, \infty)$ と表記すると、

$$\begin{aligned} f'(z) \leq 0 &\iff 1 - y + \frac{\log y - \mu}{\sigma^2} \leq 0 \\ &\iff \log y \leq (\mu - \sigma^2) + \sigma^2 y \end{aligned}$$

により、次の表現を得る :

$$\begin{aligned} f'(z) \leq 0 &\iff D(y) \geq \log y \\ \text{但し, } D(y) &:= (\mu - \sigma^2) + \sigma^2 y, \quad y = -\log z, \quad z \in (0, 1). \end{aligned} \tag{3}$$

任意の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、傾きが σ^2 で切片が $\mu - \sigma^2$ の直線 $D(y)$ が対数関数 $\log y$ の接線となる $\mu \in (-\infty, \infty)$ が存在する. 実際, そのような μ は次のようにして求まる. 対数関数 $\log y$ の傾きが $d(\log y)/dy = 1/y$ であることに注意すれば,

$$\sigma^2 = \frac{1}{y} \iff y = \frac{1}{\sigma^2}$$

により、 $y = 1/\sigma^2$ において対数関数 $\log y$ の傾きは σ^2 となるので、対数関数 $\log y$ と傾き σ^2 の直線 $D(y)$ の $y = 1/\sigma^2$ における値を等置させればよい :

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\sigma^2} &= D\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = 1 + \mu - \sigma^2 \\ &\iff \mu = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1. \end{aligned}$$

以下では、このようにして σ^2 に応じて定まる μ を μ_* と表記する :

$$\mu_* := \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1. \tag{4}$$

これにより、任意の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、 $\mu > \mu_*$ の場合、 $\forall y > 0$ に対して $D(y) > \log y$ であり、 $\mu = \mu_*$ の場合、 $\forall y \neq 1/\sigma^2$ に対して $D(y) > \log y$ にして $y = 1/\sigma^2$ に対して $D(y) = \log y$ であり、 $\mu < \mu_*$ の場合、適当な $0 < \exists y_1 < \exists y_2 < \infty$ が存在して、 $y = y_1, y_2$ に対しては $D(y) = \log y$ であり、 $\forall y < y_1$ または $y_2 < \forall y$ に対しては $D(y) > \log y$ 、 $y_1 < \forall y < y_2$ に対しては $D(y) < \log y$ であることが分かる（図1，図2，図3参照）。

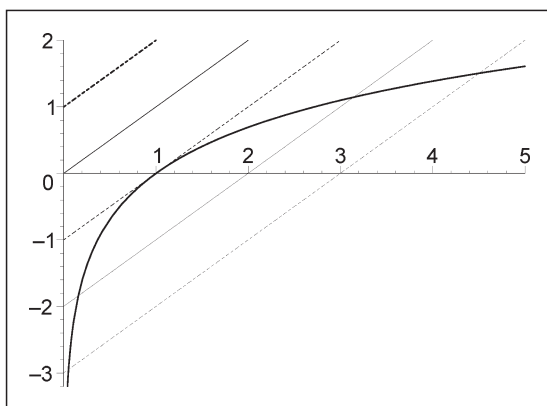


図1 対数関数 $\log y$ （太実線）と $D(y)$ のグラフ（ $\sigma^2 = 1$ の場合，横軸 y ）： $\mu = 2$ （太点線）， $\mu = 1$ （実線）， $\mu = \mu_* = 0$ （点線）， $\mu = -1$ （細実線）， $\mu = -2$ （細点線）の場合

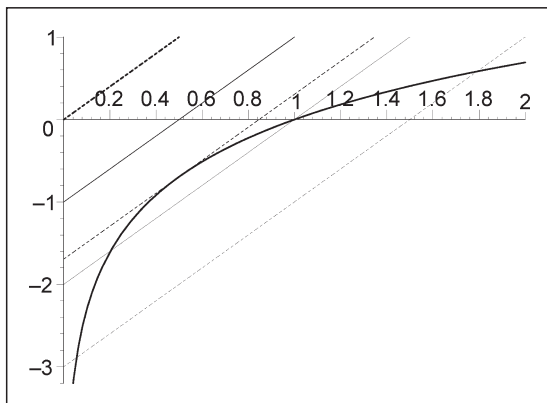


図2 対数関数 $\log y$ (太実線) と $D(y)$ のグラフ ($\sigma^2 = 2 > 1$ の場合, 横軸 y) :
 $\mu = 2$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = \mu_* = 1 - \log 2$ (点線), $\mu = 0$ (細実線),
 $\mu = -1$ (細点線) の場合

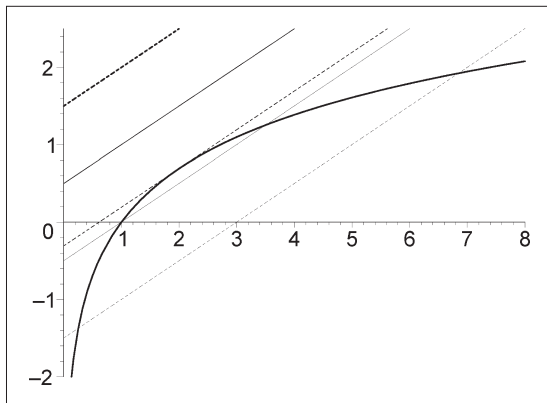


図3 対数関数 $\log y$ (太実線) と $D(y)$ のグラフ ($\sigma^2 = 1/2 < 1$ の場合, 横軸 y) :
 $\mu = 2$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = \mu_* = -1/2 + \log 2$ (点線), $\mu = 0$ (細実線),
 $\mu = -1$ (細点線) の場合

以上によって，同値関係(3)式に注意すれば，(2)式で定義される密度関数 f の増減表は表 1 として得られることが分かる．但し， z と y は互いに単調減少変換の関係 $z = e^{-y} \iff y = -\log z$ にあることに注意する．また，上記の $y_1 < y_2$ に対して $z_1 := e^{-y_1}$ ， $z_2 := e^{-y_2}$ と表記した： $z_1 > z_2$ ．

表 1 密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ の増減表：上段表 ($-\infty < \mu < \mu_*$ の場合)，下段左表 ($\mu = \mu_*$ の場合)，下段右表 ($\mu_* < \mu < \infty$ の場合)．但し， $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$ ．

z	0	...	z_2	...	z_1	...	1
f'		—	0	+	0	—	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

z	0	...	e^{-1/σ^2}	...	1
f'		—	0	—	
f		$\searrow$		$\searrow$	

z	0	...	1
f'		—	
f		$\searrow$	

これによって，密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ は，(4)式で定義される μ_* に応じて， $\mu < \mu_*$ の場合に単調ではないものの右下がりの形状（非単調減少型）を示し， $\mu \geq \mu_*$ の場合に単調な右下がりの形状（単調減少型）を示す事が判明する（命題 1 参照）．なお，表 2 は命題 1 の知見を表として整理する．

命題 1（対数正規確率変数の指数変換の分布の形状）(2)式で定義される密度関数 f のグラフ $\{(z, f(z|\mu, \sigma^2)) | z \in (0, 1)\}$ の形状は，2つの母数 μ と σ^2 に応じて以下のように定まる（表 2 参照）．但し， $\mu \in (-\infty, \infty)$ ， $\sigma^2 \in (0, \infty)$ である．また，

$$\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$$

である．なお，以下では， $f(z) := f(z|\mu, \sigma^2)$ と略記する．図については，付録 B（特に，B. 2 節）を参照されたい．

1. $-\infty < \mu < \mu_*$ の場合：非単調減少型

密度関数 $f(z)$ のグラフは、 $0 < z_2 < z_1 < 1$ なる z_2 と z_1 が存在して、 z_2 を極小点、 z_1 を極大点として減少・増加・減少という形状（非単調な右下りの形状、表1上段表参照）を示す。

2. $\mu_* \leq \mu < \infty$ の場合：単調減少型

密度関数 $f(z)$ は z の単調減少関数であり、そのグラフは単調な右下りの形状を示す。

表2 密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ の形状の分類（命題1参照）

	$-\infty < \mu < \mu_*$	$\mu_* \leq \mu < \infty$
$0 < \sigma^2 < \infty$	非単調減少型	単調減少型

* 但し、 $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1$ 。

最後に、任意の $\sigma^2 > 0$ に対して $\mu_* = \sigma^2 - \log \sigma^2 - 1 \geq 0$ であり、かつ、 $\mu_* = 0 \iff \sigma^2 = 1$ である事、更に、 σ^2 が1から遠ざかる程に μ_* が大きくなる事に注意する。これによって、十分に大きいもしくは0に近い σ^2 に対しては、 μ_* も十分に大きくなるので、(2)式で定義される密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ はより広範囲の $\mu \in (-\infty, \infty)$ に対して非単調減少型の形状を示す事が窺える。少なくとも、任意の $\sigma^2 > 0$ に対して、 $\mu < 0$ ならば密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ は非単調減少型の形状を示す。

4 結 論

本稿において、対数正規確率変数の指数変換の分布、即ち、一回の対数変換によって対数正規分布に帰着する分布、更に言い換えれば、二回の対数変換によって正規分布に帰着する分布について考察した。それは、一回の指数変換に

よって一様分布に帰着する分布を指数分布と呼び、二回の指数変換によって一様分布に帰着する分布（極値分布）を二重指数分布とも呼ぶ事に倣えば、二重対数正規分布とも呼ばれ得る分布である。本稿において構成されたその密度関数は、単位区間 $(0, 1)$ 上に定義される(2)式によって与えられ、2つの母数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ を持つ。そして、その密度は、正值母数 σ^2 の任意の値に対して非負の実数値 μ_* が定まり、 μ_* より小なる μ に対しては非単調減少型の形状を示し、 μ_* 以上なる μ に対しては単調減少型の形状を示すことが判明した（命題1参照）。

参考文献

- [1] 柴田義貞（1981）『正規分布：特性と応用』東京大学出版会。
- [2] 蓑谷千風彦（2010）『統計分布ハンドブック（増補版）』朝倉書店。
- [3] 蓑谷千風彦（2012）『正規分布ハンドブック』朝倉書店。
- [4] Aitchison, J. and J. A. C. Brown（1957）*The Lognormal Distribution: with Special Reference to Its Uses in Economics*, Cambridge University Press.
- [5] Balakrishnan, N. and V. B. Nevzorov（2003）*A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons.
- [6] Crooks, G. E.（2019）*Field Guide to Continuous Probability Distributions*, Berkeley Institute for Theoretical Sciences.
- [7] Crow, E. L. and K. Shimizu eds.（1988）*Lognormal Distributions: Theory and Applications*, Marcel Dekker.
- [8] Forbes, C., M. Evans, N. Hastings and B. Peacock（2011）*Statistical Distributions, 4th edition*, John Wiley & Sons.
- [9] Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan（1994）*Continuous Univariate Distributions, Volume 1, 2nd edition*, John Wiley & Sons.
- [10] Krishnamoorthy, K.（2016）*Handbook of Statistical Distributions with Applications, 2nd edition*, Taylor & Francis Group.
- [11] Leemis, M. L. and J. T. McQueston（2008）“Univariate distribution relationships”, *The American Statistician*, 62, pp.45-53.
- [12] Leemis, M. L., D. J. Lockett, A. G. Powell and P. E. Vermeer（2012）“Univariate probability distributions”, *Journal of Statistics Education*, 20, pp.1-11.

- [13] Limpert, E., W. A. Stahel, and M. Abbt (2001) "Log-normal distributions across the sciences: keys and clues", *BioScience*, 51, pp.341-352.
- [14] Limpert, E. and W. A. Stahel (2017) "The log-normal distribution", *Significance*, 14/1, pp.8-9.
- [15] Patel, J. K. and C. B. Read (1996) *Handbook of the Normal Distribution*, 2nd edition, Marcel Dekker.
- [16] Simon, M. K. (2002) *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists*, Springer.
- [17] Song, W. T. and Y. Chen (2011) "Eighty univariate distributions and their relationships displayed in a matrix format", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, pp.1979-1984.
- [18] Stuart, A. and J. K. Ord (1994) *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory*, 6th edition, Arnold.

付録 A 対数正規分布とその形状

密度関数(1)式を持つ対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ と $Y \sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ に対して、 Y の負の指数変換 $Z = e^{-Y}$ の密度の形状については、既に命題 1 によって明らかにされた。本付録においては、参考として、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度の形状について命題 1 と同様の分析を提示する。

先ず、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数(1)式は、標準正規分布 $N(0, 1)$ の密度関数 $\phi(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$ を用いて、次式として表現される：

$$g(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma y} \phi\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right).$$

但し、一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 ψ は $N(0, 1)$ の密度関数 ϕ を用いて、 $\psi(y) = \phi((y - \mu)/\sigma)/\sigma$ と表される事に注意する。ここで、 $\phi'(y) = -y\phi(y)$ に注意すれば、以下の展開を得る：

$$\begin{aligned} g'(y|\mu, \sigma^2) &= -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sigma^3 y^2} \phi\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= -\frac{\sigma^2 + \log y - \mu}{\sigma^2 y} g(y|\mu, \sigma^2). \end{aligned} \tag{5}$$

よって、密度関数が非負である事 $g(y|\mu, \sigma^2) \geq 0$ と $y > 0$, $\sigma^2 > 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} g'(y|\mu, \sigma^2) \leq 0 &\iff \sigma^2 + \log y - \mu \geq 0 \\ &\iff \log y \geq \mu - \sigma^2 \\ &\iff y \geq e^{\mu - \sigma^2} \end{aligned}$$

であり、また、次式を得る：

$$g(e^{\mu - \sigma^2} | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} e^{\mu - \sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

これにより、対数正規分布の密度関数(1)式の増減表を得る（表 3）。従っ

て、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数(1)式は、任意の $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、単峰型の形状を示すことが判明する。

表3 対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 $g(y|\mu, \sigma^2)$ の増減表

y	0		$\exp(\mu - \sigma^2)$		∞
$g'(y)$		+	0	-	
$g(y)$		$\nearrow$	$\frac{\exp(-\mu + \sigma^2/2)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$\searrow$	

命題2 (対数正規分布の形状) 対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 ((1)式) のグラフ $\{(y, g(y|\mu, \sigma^2)) | y \in (0, \infty)\}$ の形状は、2つの母数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ と $\sigma^2 \in (0, \infty)$ の任意の値に対して、 m_o を最頻値とする単峰型となる：

$$m_o := e^{\mu - \sigma^2} > 0. \quad (6)$$

これにより、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の最頻値 $m_o = e^{\mu - \sigma^2}$ は、 $\mu = \sigma^2$ で1、 $\mu < \sigma^2$ で1未満、 $\mu > \sigma^2$ で1より大となる事が分かる。また、最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2) := g(m_o|\mu, \sigma^2)$ として次式が得られる：

$$h(\mu, \sigma^2) := g(m_o|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (7)$$

従って、対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の最頻値と最頻値における密度について以下の結論を得る：

1. 所与の $\sigma^2 \in (0, \infty)$ に対して、最頻値 m_o は μ の単調増加関数であり、最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は μ の単調減少関数である (図4参照)：

$$\frac{\partial m_o}{\partial \mu} = e^{\mu - \sigma^2} = m_o > 0, \quad \frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} < 0.$$

また、最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ の極限として以下を得

る：

$$\begin{aligned} m_o &\xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} 0, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} \infty. \\ m_o &\xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \infty, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

2. 所与の $\mu \in (-\infty, \infty)$ に対して、最頻値 m_o は σ^2 の単調減少関数であり、最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は、 $\sigma^2 < 1$ の時に σ^2 の単調減少関数、 $\sigma^2 > 1$ の時に σ^2 の単調増加関数となり、 $\sigma^2 = 1$ の時に最小値を取る（図 5 参照）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_o}{\partial \sigma^2} &= -e^{\mu - \sigma^2} = -m_o < 0, \\ \frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right] \times (\sigma^2 - 1) \leq 0 \iff \sigma^2 \leq 1. \end{aligned}$$

なお、最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は、 $\sigma^2 = 1$ の時、

$$m_o = e^{\mu-1}, \quad h(\mu, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu + \frac{1}{2}}$$

となり、極限としては以下を得る：

$$\begin{aligned} m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} e^{\mu}, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty. \\ m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0, & h(\mu, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

3. 任意の実数 c に対して、 $\mu = c\sigma^2$ の時、最頻値 m_o と最頻値 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は以下となる：

$$m_o = e^{(c-1)\sigma^2}, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{2c-1}{2}\sigma^2}.$$

これにより、最頻値 m_o は $c \leq 1$ に応じて σ^2 の単調減少/単調増加となり、 m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は $c > 1/2$ で σ^2 の単調減少となることが分かる。より詳細には以下の通りである：

- (a) $c < 1/2$ の場合、 σ^2 に対して、最頻値 m_o は単調減少であり、 m_o に

おける密度 $h(\mu, \sigma^2)$ はU字型に変化する (図5参照: $c=0$ の場合).

実際, $c < 1/2 \iff 1-2c > 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{2c-1}{2}\sigma^2} \times [(1-2c)\sigma^2 - 1] \leq 0 \\ \iff \sigma^2 &\leq \frac{1}{1-2c} > 0.\end{aligned}$$

を得るので, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は, $\sigma^2 < 1/(1-2c)$ の時に減少し, $\sigma^2 > 1/(1-2c)$ の時に増加する事が分かる. なお, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は, $\sigma^2 = 1/(1-2c)$ の時に最小値

$$h\left(c\sigma^2, \sigma^2 = \frac{1}{1-2c}\right) = \sqrt{\frac{(1-2c)e}{2\pi}} \quad \text{with} \quad m_o = e^{-\frac{1-c}{1-2c}} < 1$$

を取り, 極限として以下を得る:

$$\begin{aligned}h(c\sigma^2, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty \quad \text{with} \quad m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1, \\ h(c\sigma^2, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty \quad \text{with} \quad m_o \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

- (b) $1/2 \leq c < 1$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o と m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ はいずれも単調減少であり, その極限として以下を得る (図6参照):

$$\begin{aligned}m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty, \\ m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

- (c) $c=1$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o は定数 $e^0 = 1$, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は単調減少であり, その極限として以下を得る (図7参照):

$$h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty, \quad h(c\sigma^2, \sigma^2) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0$$

- (d) $1 < c$ の場合, σ^2 に対して, 最頻値 m_o は単調増加, m_o における密度 $h(\mu, \sigma^2)$ は単調減少であり, その極限として以下を得る (図 8 参照) :

$$\begin{aligned} m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} 1, & h(c\sigma^2, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow 0} \infty, \\ m_o &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \infty, & h(c\sigma^2, \sigma^2) &\xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

なお, (7)式により, $\sigma^2 = 1$ であつ $\mu = \sigma^2/2 = 1/2$ ならば, 対数正規分布の最頻値の密度は標準正規分布 $N(0, 1)$ の最頻値の密度 $1/\sqrt{2\pi}$ と一致する事, つまり, $\Lambda(1/2, 1)$ と標準正規分布 $N(0, 1)$, 正規分布 $N(1/2, 1)$ の最頻値の密度は一致する事が分かる.

付録B 密度関数のグラフ

本付録においては、対数正規分布とその負の指数変換の密度関数のグラフを図示する。即ち、(1)式で定義される対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 $g(y|\mu, \sigma^2)$ についてはB.1節において（横軸 $y \in (0, \infty)$ ）、(2)式で定義される対数正規確率変数の負の指数変換の密度関数 $f(z|\mu, \sigma^2)$ についてはB.2節において（横軸 $z \in (0, 1)$ ）、それぞれ提示する。

B.1 対数正規分布

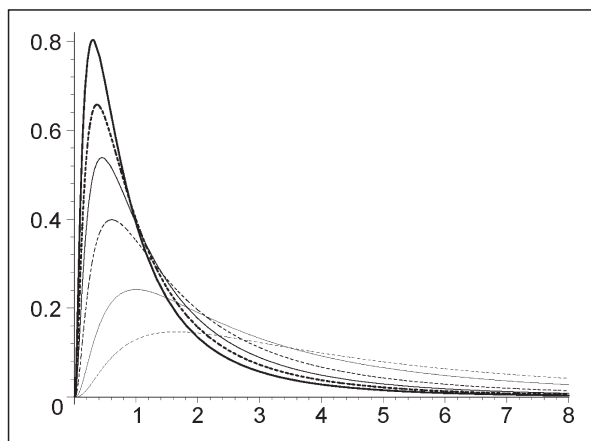


図4 対数正規分布 ($\sigma^2 = 1$) : $\mu = -1/5$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = 1/5$ (実線), $\mu = 1/2$ (点線), $\mu = 1$ (細実線), $\mu = 3/2$ (細点線)

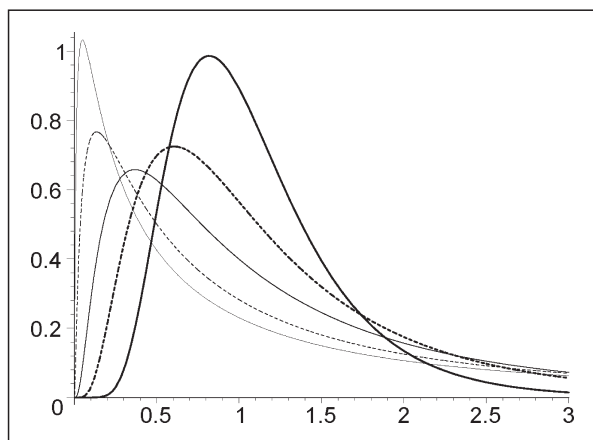


図5 対数正規分布 ($\mu=0$): $\sigma^2=1/5$ (太実線), $\sigma^2=1/2$ (太点線), $\sigma^2=1$ (実線), $\sigma^2=2$ (点線), $\sigma^2=3$ (細実線)

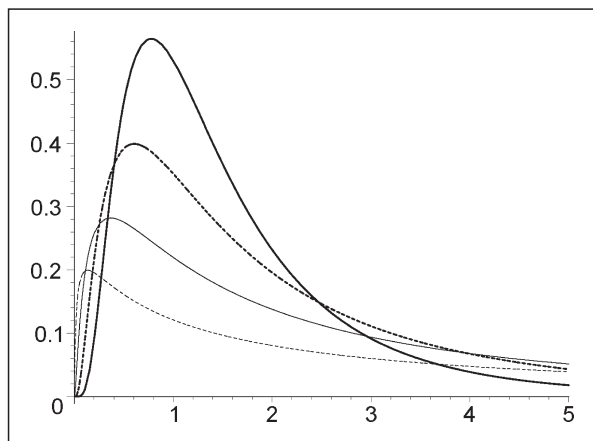


図6 対数正規分布 ($\mu=\sigma^2/2$): $\sigma^2=1/2$ (太実線), $\sigma^2=1$ (太点線), $\sigma^2=2$ (実線), $\sigma^2=4$ (点線)

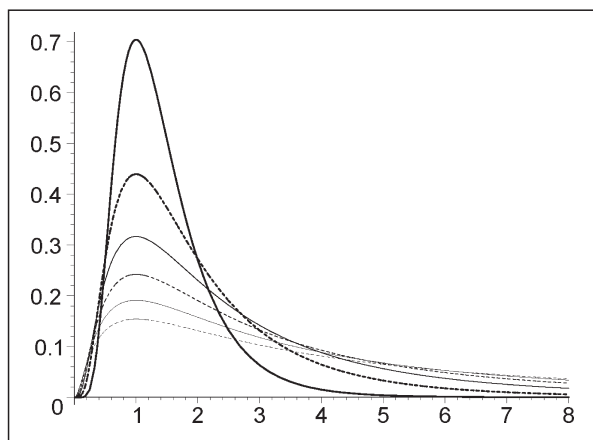


図7 対数正規分布 ($\mu = \sigma^2$) : $\sigma^2 = 1/4$ (太実線), $\sigma^2 = 1/2$ (太点線), $\sigma^2 = 3/4$ (実線), $\sigma^2 = 1$ (点線), $\sigma^2 = 5/4$ (細実線), $\sigma^2 = 3/2$ (細点線)

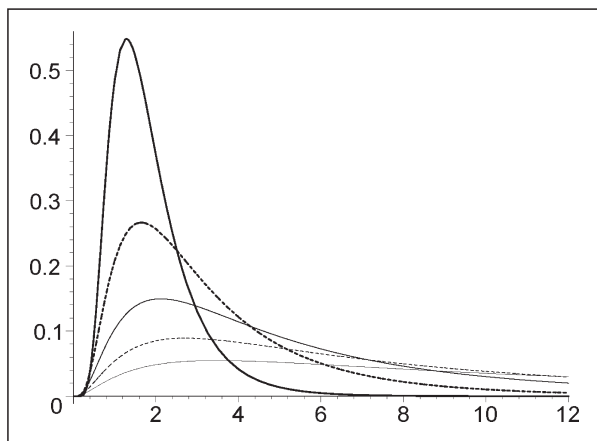


図8 対数正規分布 ($\mu = 2\sigma^2$) : $\sigma^2 = 1/4$ (太実線), $\sigma^2 = 1/2$ (太点線), $\sigma^2 = 3/4$ (実線), $\sigma^2 = 1$ (点線), $\sigma^2 = 5/4$ (細実線)

B.2 対数正規分布の指数変換

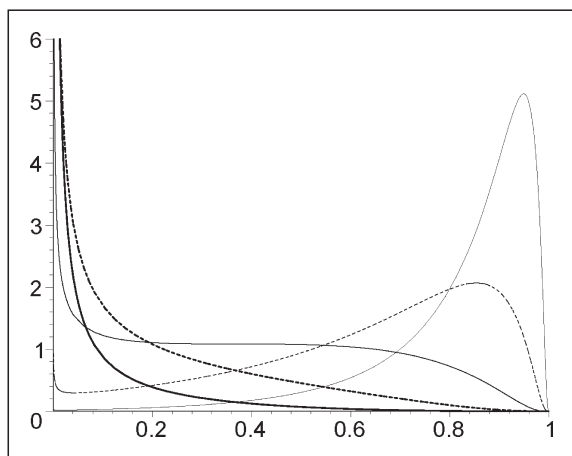


図9 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$): $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1$ (太点線), $\mu = \mu_* = 0$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -2$ (細実線)

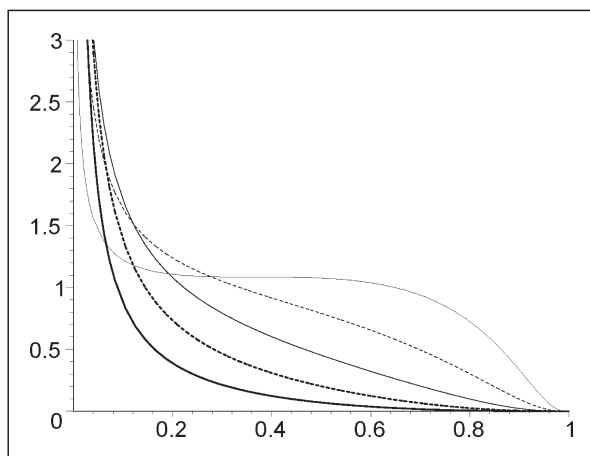


図10 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$, 単調減少型): $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* = 0$ (細実線)

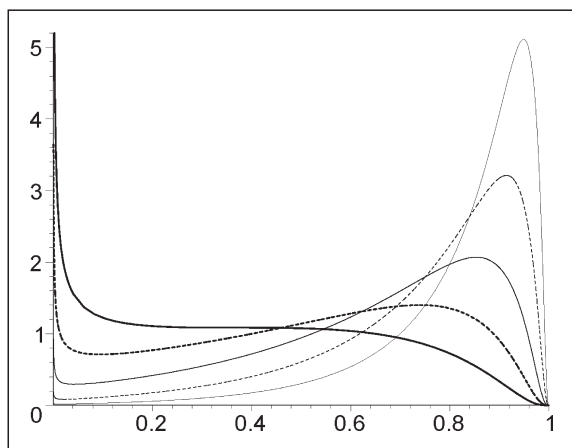


図11 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1$, 非単調減少型) : $\mu = \mu_* = 0$ (太実線), $\mu = -0.5$ (太点線), $\mu = -1$ (実線), $\mu = -1.5$ (点線), $\mu = -2$ (細実線)

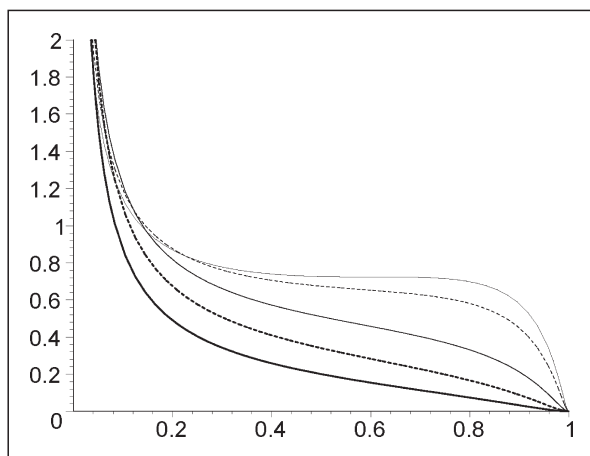


図12 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 2$, 単調減少型) : $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* \approx 0.307$ (細実線)

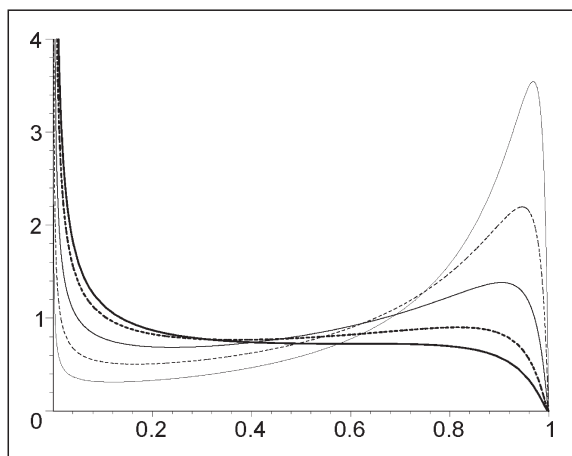


図13 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 2$, 非単調減少型) : $\mu = \mu_* \simeq 0.307$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = -0.5$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -1.5$ (細実線)

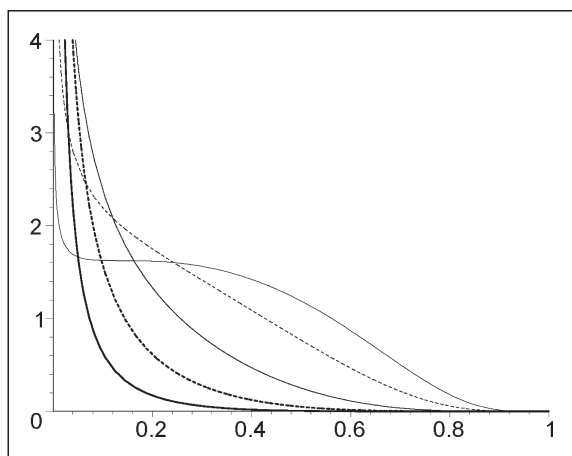


図14 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1/2$, 単調減少型) : $\mu = 2$ (太実線), $\mu = 1.5$ (太点線), $\mu = 1$ (実線), $\mu = 0.5$ (点線), $\mu = \mu_* \simeq 0.193$ (細実線)

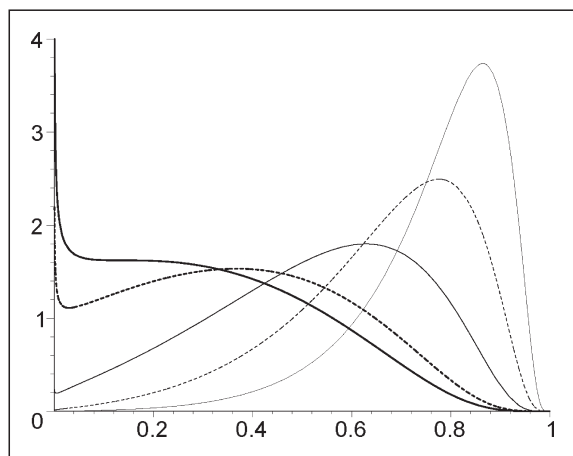


図15 対数正規分布の指数変換 ($\sigma^2 = 1/2$, 非単調減少型): $\mu = \mu_* \simeq 0.193$ (太実線), $\mu = 0$ (太点線), $\mu = -0.5$ (実線), $\mu = -1$ (点線), $\mu = -1.5$ (細実線)

On Shapes of Distributions of the Exponential Transformation of Lognormal Random Variables

Masato Kagihara*

ABSTRACT

This paper considers distributions of the exponential transformation of lognormal random variables. In particular, relations between shapes and parameters of the distributions are investigated. It is shown that density functions of the distributions are monotonically decreasing for some values of the parameters and non-monotonically decreasing for the other values. Therefore, it is concluded that the distributions of the exponential transformation of lognormal random variables take on two types of shapes, a type of monotonic decrease or non-monotonic decrease, depending on the values of the parameters.

Keywords : Lognormal distributions; Exponential transformation;
Density functions

JEL Classification Numbers : C46, C20.

* Faculty of Economics, Osaka Gakuin University, e-mail: masato.kagihara@ogu.ac.jp

大阪学院大学経済学会会則

- 第1条 本会は大阪学院大学経済学会と称する。
- 第2条 本会の事務所は大阪学院大学図書館内におく。
- 第3条 本会は本学の設立の趣旨にもとづいて経済学およびこれに関連する諸科学の研究を促進することを目的とする。
- 第4条 本会は次の事業を行う。
1. 機関誌「大阪学院大学経済論集」の発行
 2. 研究会、講演会および討論会の開催
 3. その他本会の目的を達成するための必要な事業
- 第5条 本会の会員は次の通りとする。
1. 大阪学院大学・大阪学院大学短期大学部の専任教員で経済学およびこれに関連する諸科学を研究する者
 2. 本会の趣旨に賛同し、役員会の承認を得た者
- 第6条 会員は本会の機関誌その他刊行物の配布を受けることができる。
- 第7条 本会には次の役員をおく。任期は2年とし、再選を妨げない。
1. 会 長 1名
 2. 副 会 長 1名
 3. 編集および庶務委員 4名以内
- 第8条 会長は会員の中から選出し、総長が委嘱する。
副会長は会長が会員の中から選出し、会長が委嘱する。
委員は会員の互選にもとづいて、会長が委嘱する。
- 第9条 会長は本会を代表し、会務を統轄する。副会長は会長を補佐する。
役員は役員会を構成し、本会の企画・運営にあたる。
- 第10条 会長は役員会を召集して、その議長となる。
- 第11条 会長は会務執行に必要なとき、会員の中から実行委員を委嘱するこ

とがある。

第12条 総会は年1回これを開く、ただし、必要ある時は会長が臨時に召集することができる。

第13条 本会の経費は大阪学院大学からの交付金のほかに、有志からの寄付金その他の収入をもってあてる。

第14条 各学会の相互の連絡調整をはかるため「大阪学院大学学会連合」に参加する。

第15条 会計は毎年4月1日に始まり、翌年3月31日に終る。

第16条 本会会則の改正は総会の議を経て、総長の承認をうるものとする。

付 則

1. この会則は、昭和62年4月1日から施行する。
2. この会則は、平成13年4月1日から改正し施行する。
3. この会則は、平成17年4月1日から改正し施行する。
4. この会則は、平成25年4月1日から改正し施行する。

以 上

大阪学院大学経済論集投稿規程

1. 『大阪学院大学経済論集』（以下、本誌）は、大阪学院大学経済学会の会員の研究成果を公刊することを主目的とし、会員より組織される本誌編集委員会が編集作業の任にあたる。
2. 投稿論文はその内容が経済学およびこれに関連する諸科学に属するものでなければならない。
3. 投稿資格者は、原則として本学経済学会の会員、本学大学院の院生に限る。ただし、
 - a. 本学院生の投稿は指導教員の推薦を必要とする。
 - b. 客員教授、非常勤講師、学外者の原稿については編集委員会ではかる。
 - c. 本会々員と共同執筆についてはこの限りではない。
4. 原稿は次のように区分し、この順序にしたがって編集する。
 - 「論説」：経済に関する独創的かつオリジナルな研究成果をまとめたもの、あるいは、既知の内容を有意義な方法で統合・整理・解説することを目的とする学術的価値の高いものとする。
 - 「研究ノート」：論文よりも主題がより限定的で枚数が少ないものであり、速報性を有し、理論的・実証的に新しい事実や価値のある試算・観察結果を含むものとする。
 - 「翻訳」：学界において重要な著作の翻訳とする。これについては原稿提出時に、原著者ならびに初版発行機関より翻訳許可の旨を記した文章あるいはそのコピーを添付すること。
 - 「資料紹介・統計資料」：未公開資（史）料の紹介ならびに翻刻あるいは実証分析におけるデータの集計ならびに推計結果を報告するものとする。

「書評・書評論文」：ここで取り上げる著作の選択ならびに書評者は、
本誌編集委員会が、その内容および執筆者を関係
各方面の意見を参考にして決定し、依頼する。

「学界展望」：学界において重要な問題の展望とする。これについて
は、本誌編集委員会が、その内容および執筆者を関係各
方面の意見を参考にして決定し、依頼する。

「正誤表」：原則として著者の提出した正誤表にもとづき、本誌編集委
員会の承認したものを掲載する。

5. 原稿は未発表のものに限り、原稿の最大限字数は200字詰原稿用紙80
枚、または印刷ページにしてA5版20ページのいずれをも超えないものと
する。

これ以上の枚数については編集委員会で検討のうえで、分割掲載するこ
とがある。

6. 投稿原稿の採否は、本誌編集委員会および本誌編集委員会の委嘱する審
査委員の審査にもとづき、本誌編集委員会において決定する。執筆要領を
逸脱ないしは本誌の価値を著しく損なう恐れのある原稿は、審査の対象外
とされる場合がある。

7. 発行は原則として6月、12月の年2回とし、年間総ページ数をA5版
600ページ程度とする。

なお、臨時増刊号を発行することがある。

8. 抜刷は40部を進呈し、これ以上必要な場合は実費とする。
9. 投稿され掲載された成果物の著作権は、著作者が保持する。

なお、出版権、頒布権については大学が保持するため、論文転載を希望
する場合は、学会宛に転載許可願を提出願うこととする。

10. 投稿された論文の著作者は、当該論文を電子化により公開することに
ついて、複製権および公衆送信権を大学に許諾したものとみなす。大学が、

複製権および公衆送信権を第三者に委託した場合も同様とする。

この規程は、平成25年4月1日から適用する。

以 上

大阪学院大学経済論集執筆要領

1. 原稿について

- (1) 投稿原稿は、原則として、投稿規程（200字詰原稿用紙80枚まで）の字数に相当する横書きの電子文書とする。原稿を保存した記録媒体（USBメモリやCD-Rなど）とハードコピー1部の両方を提出し、必ず原稿提出票を添えること。その際、使用したパソコンの機種名とアプリケーションソフト名を明記すること。
- (2) 現代かなづかいに統一し、常用漢字を使用すること。なお、外来語は必要と思われるとき以外はカタカナに統一し（頁→ページ、仏蘭西→フランス）、難字は欄外に大書きすること。
- (3) 英文（欧文）の著書名、雑誌名および図、数式中の記号等は、全て斜体（イタリック体）とするが、印刷字体その他印刷上のスタイルなどの指定は、執筆者が原稿に直接朱書きすること。
- (4) 図と表は原稿とは別に書いて1枚ごとに番号と執筆者名を記入し、本文中に挿入箇所を指示すること。また図の説明文は、別紙にまとめること。
- (5) 自分でスミ入れして完成させた原図や写真の場合は、厚手の台紙に貼り付けて希望縮尺を記入すること。印刷所に原図作成を依頼する場合は鉛筆で下書きしたものを用意するか、または適当な方法で書いた見本を添えること。
- (6) *ibid. op. cit.*, 等も斜体とする。そしてそれが文頭に来的时候は、*Ibid.*, 等と大文字にする。
- (7) 日本語、中国語等の場合、著書名および雑誌名は『 』、論文名は「 」で囲むこと。欧文では論文名は“ ”で囲むこと。
- (8) 本文中に引用する場合は、引用する著者の氏名の後に発表年を（ ）で囲って記入する。

- (9) 英文著書および雑誌のページを表す「p.」ないし「pp.」は小文字とする。
- (10) 原稿は下記の順序で、別々に作成すること。
- ① 表紙には、題名、著者名、所属を記入すること。
 - ② 和文要旨（400字以内、ただし欧文・中国語文等の場合は除く）
 - ③ 本文
 - ④ 文末注（脚注の場合は本文に含む）
 - ⑤ 参考文献
 - ⑥ 図・表（本文中に入れている場合はこの限りではない）
 - ⑦ 英文論題
 - ⑧ 英文著者名
 - ⑨ 英文要旨（主要欧文でも可）（100語程度）
- (11) 「論文」・「研究ノート」については、本文冒頭に「和文要旨」・「キーワード」・「経済学文献季報分類番号（別表）」の順に、文末に原則として「英文（欧文等）要旨」・「キーワード」・「*Journal of Economic Literature*（以下、*J.E.L.*）.Classification Number（別表）」の順にそれぞれ記入すること。なお、「仏文要旨」・「独文要旨」等については「キーワード」・「*J.E.L. Classification Number*」は不要である。
- (12) 掲載順序は、本誌編集委員会が認めた寄稿者を除き「教授」・「准教授」・「講師」・「大学院生」の順とし、消印等で示された日付等で示された受理日にもとづき、それぞれ入稿の順とする。
- (13) 「和文要旨」・「英文（欧文等）要旨」は、それらのみで原稿の内容を的確に把握できるように、その目的と方法ならびに成果を簡潔に記すこと。
- (14) 「和文要旨」の末尾には「キーワード」と「経済学文献季報分類番号」を記入すること。
- (15) 「キーワード」には、本文の内容に照らして重要と思われる単語を3～5つ程度記入すること。

- (16) 「英文（欧文等）要旨」は、100語程度とし、その末尾に「キーワード」・「*J.E.L. Classification Number*」をそれぞれ記入すること。「仏文要旨」・「独文要旨」等については、「キーワード」・「*J.E.L. Classification Number*」は、不要である。
- (17) 「英文（欧文等）要旨」の校閲ならびに「キーワード」・「経済学文献季報分類番号」・「*J.E.L. Classification Number*」の選定は投稿者の責任において行うこと。
- (18) 「翻訳」は、最初のページに、当該書の著者、書名、発行所、発行年月（西暦）、ページ数を特記すること。
- (19) 「書評・書評論文」は、原則として、原稿末尾に当該書の発行所、発行年月（西暦）判型、ページ数および定価をカッコ内に記載すること。
- (20) 投稿原稿が英文（欧文等）の場合、本文の文頭に、「英文（欧文等）要旨（Abstract）」・「キーワード（Keyword）」・「*J.E.L. Classification Number*」の順でこれらを記載すること。
- (21) 投稿原稿が中国語文等の場合、本文の末尾に「英文（欧文等）要旨（Abstract）」・「キーワード（Keyword）」・「*J.E.L. Classification Number*」の順でこれらを記載すること。

2. 注釈について

- (1) 注釈は原則として、文末に一括表示し、次の方法による。
- (2) 本文の注釈番号は（ ）で囲み、右肩表示とし、全体を通じて通し番号をつけること。

3. 校正について

- (1) 著者校正は2校までとし、朱筆で記入すること。2校以前でも校正の必要がなくなれば校了または責了とすること。

- (2) 特殊な印刷などによって通常の印刷費を大幅に上回る場合は、必要経費の一部が執筆者負担となることがあるので、特に注意されたい。
- (3) 投稿原稿は完成原稿とするので、原則として校正および印刷上の誤り以外、語句の修正や挿入を認めない。

4. 原稿提出先等について

- (1) 原稿の提出先は図書館学会係とする。なお、本学指定の原稿用紙および原稿提出票は図書館事務室で配付する。
- (2) 本誌全体の体裁にかかわる事項については、本誌編集委員会より、投稿者に形式上の変更を求めることがある。

以 上

注. 1-(11)にある「経済学文献季報分類番号」は経済学文献季報が廃刊になったため取り止め、第22巻第2号から暫定措置として「JEL分類記号」を記載することになった。

執筆者紹介（掲載順）

山 田 雅 俊（経済学部教授）

坂 本 淳（経済学部講師）

鍵 原 理 人（経済学部准教授）

大阪学院大学経済学会委員

会 長 宇佐美 竜 一

副会長 松 村 隆

委 員 白 井 克 典 森 田 健 司

和 田 聡 子

2022年(令和4年)12月31日 発行

編集兼発行人

大阪学院大学経済学会

〒564-8511 大阪府吹田市岸部南二丁目36番1号 TEL(06)6381-8434(代)

印刷

大枝印刷株式会社

〒564-0031 大阪府吹田市元町28番7号 TEL(06)6381-3395(代)

THE OSAKA GAKUIN REVIEW
OF
ECONOMICS

VOL. 36, NOS. 1・2

DECEMBER 2022

CONTENTS

ARTICLES

- Masatoshi Yamada ····· Equilibrium, Homogeneity and Heckscher-Ohlin Theorem
..... 1
- Jun Sakamoto ········· Empirical Analysis of Comovement Premiums
in the Japanese Market
.....25

NOTE

- Masato Kagihara ····· On Shapes of Distributions of the Exponential
Transformation of Lognormal Random Variables
.....43